

C^* -Rhapsody

Aleks Kleyn

ABSTRACT. In the paper I considered linear and antilinear mappings of finite dimensional algebra over complex field, as well I considered involution. I considered also an example of C^* -algebra.

CONTENTS

1. Preface	1
2. Conventions	2
3. C -algebra	2
4. Linear Mapping of C -algebra	4
5. Antilinear Mapping of C -algebra	6
6. Morphism of Algebra	8
7. Linear Automorphism of Quaternion Algebra	11
8. Ring with Conjugation	14
9. Linear Mapping of Algebra with Conjugation	17
10. Antilinear Homomorphism of $D\star$ -Algebra	19
11. Involution of Banach D -algebra	22
12. C^* -algebra	23
13. Example of Involution	24
14. References	26
15. Index	27
16. Special Symbols and Notations	28

1. PREFACE

Since I have been studying calculus in Banach algebra, it is difficult to ignore C^* -algebra which is a tool in quantum mechanics. However, before considering particular statements, I need to understand the structure of the linear mapping of C^* -algebra. This caused to write this paper.

However there exist different algebras where conjugation is defined. For this reason, I decided not restrict myself by considering of complex field. Considering of linear and antilinear mappings of algebra with conjugation turned out to be different from the concept, which I considered in [4]. It is attractive to find a statement similar to statement that we can expand additive mapping of complex field into sum of linear and antilinear mappings. Such statement would be a bridge

Aleks_Kleyn@MailAPS.org.
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>.
http://arxiv.org/a/kleyn_a_1.
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>.

between the results in [4] and this paper. However, there is reason to believe that in general this is not true.

This means that, in general, consideration of the conjugation is not enough for the complete classification of linear maps. However, this classification is important to understand the structure of closed differential form in Banach algebra.

2. CONVENTIONS

- (1) Let A be free finite dimensional algebra. Considering expansion of element of algebra A relative basis \bar{e} we use the same root letter to denote this element and its coordinates. However we do not use vector notation in algebra. In expression a^2 , it is not clear whether this is component of expansion of element a relative basis, or this is operation $a^2 = aa$. To make text clearer we use separate color for index of element of algebra. For instance,

$$a = a^i \bar{e}_i$$

- (2) If free finite dimensional algebra has unit, then we identify the vector of basis \bar{e}_0 with unit of algebra.
- (3) Although the algebra is a free module over some ring, we do not use the vector notation to write elements of algebra. In the case when I consider the matrix of coordinates of element of algebra, I will use vector notation to write corresponding element. In order to avoid ambiguity when I use conjugation, I denote a^* element conjugated to element a .
- (4) Without a doubt, the reader may have questions, comments, objections. I will appreciate any response.

3. C -ALGEBRA

Considered below construction is based on the construction considered in section [3]-5. In this paper, we will use notation offered in this section.

Let C be complex field. Let \bar{e}_C

$$(3.1) \quad \bar{e}_{C \cdot 0} = 1 \quad \bar{e}_{C \cdot 1} = i$$

be the basis of algebra C over real field R . Product in algebra C is defined according to rule

$$(3.2) \quad \bar{e}_{C \cdot 1}^2 = -\bar{e}_{C \cdot 0}$$

According to the theorem [3]-3.1, structural constants of complex field C over real field R have form

$$(3.3) \quad \begin{aligned} C_{C \cdot 00} &= 1 & C_{C \cdot 01} &= 1 \\ C_{C \cdot 10} &= 1 & C_{C \cdot 11} &= -1 \end{aligned}$$

According to definition [4]-2.2.1, C -algebra A is C -vector space. Let \bar{e}_{AC} be a C -basis of finite dimensional C -algebra A . The product in C -algebra A is defined by equation

$$(3.4) \quad \bar{e}_{AC \cdot k} \bar{e}_{AC \cdot l} = C_{AC \cdot kl}^i \bar{e}_{AC \cdot i}$$

where $C_{AC \cdot ij}^k$ are structural constants of C -algebra A over the field C .

I will consider the C -algebra A as direct sum of algebras C . Each item of sum I identify with vector of basis \bar{e}_{AC} . Accordingly, I can consider C -algebra A as

algebra over field R . Let \bar{e}_{AR} be basis of C -algebra A over the field R . Index of basis \bar{e}_{AR} consists from two indexes: index of fiber and index of vector of basis \bar{e}_C in fiber.

I will identify vector of basis $\bar{e}_{AC \cdot i}$ with unit in corresponding fiber. Then

$$(3.5) \quad \bar{e}_{AR \cdot ji} = \bar{e}_{C \cdot j} \bar{e}_{AC \cdot i}$$

The product of vectors of basis \bar{e}_{AR} has form

$$(3.6) \quad \bar{e}_{AR \cdot ji} \bar{e}_{AR \cdot mk} = \bar{e}_{C \cdot j} \bar{e}_{AC \cdot i} \bar{e}_{C \cdot m} \bar{e}_{AC \cdot k} = C_{C \cdot jm}^a \bar{e}_{C \cdot a} C_{AC \cdot ik}^b \bar{e}_{AC \cdot b}$$

$$(3.7) \quad \bar{e}_{AR \cdot 00} \bar{e}_{AR \cdot ki} = \bar{e}_{AR \cdot ki}$$

$$(3.8) \quad \bar{e}_{AR \cdot 10} \bar{e}_{AR \cdot 1i} = -\bar{e}_{AR \cdot 0i}$$

Because $C_{AC \cdot ik}^b \in C$, then expansion $C_{AC \cdot ik}^b \in C$ relative to basis \bar{e}_C has form

$$(3.9) \quad C_{AC \cdot ik}^b = C_{AC \cdot ik}^{bc} \bar{e}_{C \cdot c}$$

We can represent transformation f using matrix f_{kl}^{ij}

$$(3.10) \quad a'^{ij} = f_{kl}^{ij} a^{kl}$$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} a'^{0j} &= f_{0l}^{0j} a^{0l} + f_{1l}^{0j} a^{1l} \\ a'^{1j} &= f_{0l}^{1j} a^{0l} + f_{1l}^{1j} a^{1l} \end{aligned}$$

We can represent $c \in C$ in following form

$$(3.12) \quad c = c^0 \bar{e}_{AR \cdot 00} + c^1 \bar{e}_{AR \cdot 10}$$

$$(3.13) \quad c^* = c^0 \bar{e}_{AR \cdot 00} - c^1 \bar{e}_{AR \cdot 10}$$

From equations (3.7), (3.8), (3.12), it follows

$$(3.14) \quad (ca)^{0i} = c^0 a^{0i} - c^1 a^{1i}$$

$$(3.15) \quad (ca)^{1i} = c^0 a^{1i} + c^1 a^{0i}$$

Theorem 3.1. *Structural constants of C -algebra A over real field R have form*

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{AR \cdot 0i \cdot 0k}^{0b} = C_{AC \cdot ik}^{b0} \\ C_{AR \cdot 1i \cdot 1k}^{0b} = -C_{AC \cdot ik}^{b0} \\ C_{AR \cdot 0i \cdot 1k}^{0b} = -C_{AC \cdot ik}^{b1} \\ C_{AR \cdot 1i \cdot 0k}^{0b} = -C_{AC \cdot ik}^{b1} \\ C_{AR \cdot 0i \cdot 1k}^{1b} = C_{AC \cdot ik}^{b0} \\ C_{AR \cdot 1i \cdot 0k}^{1b} = C_{AC \cdot ik}^{b0} \\ C_{AR \cdot 0i \cdot 0k}^{1b} = C_{AC \cdot ik}^{b1} \\ C_{AR \cdot 1i \cdot 1k}^{1b} = -C_{AC \cdot ik}^{b1} \end{array} \right.$$

Proof. According to equations [3]-(5.3), [3]-(5.5), structural constants of algebra A over field R have form

$$(3.17) \quad \begin{aligned} C_{AR \cdot ji \cdot mk}^{db} &= C_{C \cdot jm}^a C_{C \cdot ac}^d C_{AC \cdot ik}^{bc} \\ C_{AC \cdot ik}^b &= C_{AC \cdot ik}^{bc} \bar{e}_{C \cdot c} = C_{AC \cdot ik}^{b0} + C_{AC \cdot ik}^{b1} i \end{aligned}$$

From equations (3.3), (3.17), it follows that

$$(3.18) \quad \begin{cases} C_{AR} \cdot \overset{0b}{ji \cdot mk} = C_C \cdot \overset{0}{jm} C_C \cdot \overset{0}{00} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} + C_C \cdot \overset{1}{jm} C_C \cdot \overset{0}{11} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ \quad = C_C \cdot \overset{0}{jm} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} - C_C \cdot \overset{1}{jm} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{ji \cdot mk} = C_C \cdot \overset{1}{jm} C_C \cdot \overset{1}{10} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} + C_C \cdot \overset{0}{jm} C_C \cdot \overset{1}{01} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ \quad = C_C \cdot \overset{1}{jm} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} + C_C \cdot \overset{0}{jm} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \end{cases}$$

From equations (3.3), (3.18), it follows that

$$(3.19) \quad \begin{cases} C_{AR} \cdot \overset{0b}{0i \cdot 0k} = C_C \cdot \overset{0}{00} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} - C_C \cdot \overset{1}{00} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{0b}{1i \cdot 1k} = C_C \cdot \overset{0}{11} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} - C_C \cdot \overset{1}{11} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{0b}{0i \cdot 1k} = C_C \cdot \overset{0}{01} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} - C_C \cdot \overset{1}{01} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{0b}{1i \cdot 0k} = C_C \cdot \overset{0}{10} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} - C_C \cdot \overset{1}{10} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{0i \cdot 1k} = C_C \cdot \overset{1}{01} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} + C_C \cdot \overset{0}{01} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{1i \cdot 0k} = C_C \cdot \overset{1}{10} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} + C_C \cdot \overset{0}{10} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{0i \cdot 0k} = C_C \cdot \overset{1}{00} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} + C_C \cdot \overset{0}{00} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{1i \cdot 1k} = C_C \cdot \overset{1}{11} C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} + C_C \cdot \overset{0}{11} C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \end{cases}$$

(3.16) follows from equations (3.3), (3.19). \square

From the equation (3.16), it follows that

$$(3.20) \quad \begin{cases} C_{AR} \cdot \overset{0b}{0i \cdot 0k} = -C_{AR} \cdot \overset{0b}{1i \cdot 1k} = C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{0b}{0i \cdot 1k} = C_{AR} \cdot \overset{0b}{1i \cdot 0k} = -C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{0i \cdot 1k} = C_{AR} \cdot \overset{1b}{1i \cdot 0k} = C_{AC} \cdot \overset{b0}{ik} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{0i \cdot 0k} = -C_{AR} \cdot \overset{1b}{1i \cdot 1k} = C_{AC} \cdot \overset{b1}{ik} \end{cases}$$

4. LINEAR MAPPING OF C -ALGEBRA

Definition 4.1. The mapping of C -vector spaces

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

is called C -linear if

$$(4.1) \quad f(ca) = cf(a) \quad c \in C \quad a \in A$$

\square

Theorem 4.2 (The Cauchy-Riemann equations). *Matrix of linear mapping of C -vector spaces*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

$$y^{\overset{ik}{}} = f_{\overset{jm}{}} x^{\overset{jm}{}}$$

satisfies relationship

$$(4.2) \quad \begin{aligned} f_{\cdot \overset{0i}{}}^{\cdot \overset{0j}{}} &= f_{\cdot \overset{1i}{}}^{\cdot \overset{1j}{}} \\ f_{\cdot \overset{0i}{}}^{\cdot \overset{1j}{}} &= -f_{\cdot \overset{1i}{}}^{\cdot \overset{0j}{}} \end{aligned}$$

Proof. From equations (3.11), (3.14), (3.15), it follows that

$$\begin{aligned}
 (f(ca))^{\mathbf{0}j} &= f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}(ca)^{\mathbf{0}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}(ca)^{\mathbf{1}i} \\
 (4.3) \quad &= f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}(c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{0}i} - c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{1}i}) + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}(c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{1}i} + c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{0}i}) \\
 &= f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{0}i} - f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{1}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{1}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{0}i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f(ca))^{\mathbf{1}j} &= f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}(ca)^{\mathbf{0}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}(ca)^{\mathbf{1}i} \\
 (4.4) \quad &= f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}(c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{0}i} - c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{1}i}) + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}(c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{1}i} + c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{0}i}) \\
 &= f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{0}i} - f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{1}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{1}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{0}i}
 \end{aligned}$$

From equations (4.1), (3.11), (3.12), (3.14), (3.15), it follows that

$$\begin{aligned}
 (cf(a))^{\mathbf{0}j} &= c^{\mathbf{0}}(f(a))^{\mathbf{0}j} - c^{\mathbf{1}}(f(a))^{\mathbf{1}j} \\
 (4.5) \quad &= c^{\mathbf{0}}(f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{0}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{1}i}) - c^{\mathbf{1}}(f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{0}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{1}i}) \\
 &= c^{\mathbf{0}}f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{0}i} + c^{\mathbf{0}}f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{1}i} - c^{\mathbf{1}}f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{0}i} - c^{\mathbf{1}}f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{1}i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (cf(a))^{\mathbf{1}j} &= c^{\mathbf{0}}(f(a))^{\mathbf{1}j} + c^{\mathbf{1}}(f(a))^{\mathbf{0}j} \\
 (4.6) \quad &= c^{\mathbf{0}}(f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{0}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{1}i}) + c^{\mathbf{1}}(f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{0}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{1}i}) \\
 &= c^{\mathbf{0}}f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{0}i} + c^{\mathbf{0}}f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{1}i} + c^{\mathbf{1}}f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{0}i} + c^{\mathbf{1}}f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{1}i}
 \end{aligned}$$

From equations (4.1), (4.3), (4.5), it follows that

$$\begin{aligned}
 (4.7) \quad &f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{0}i} - f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{1}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{1}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{0}i} \\
 &= c^{\mathbf{0}}f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{0}i} + c^{\mathbf{0}}f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{1}i} - c^{\mathbf{1}}f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{0}i} - c^{\mathbf{1}}f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{1}i}
 \end{aligned}$$

From equations (4.1), (4.4), (4.6), it follows that

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad &f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{0}i} - f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{1}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}c^{\mathbf{0}}a^{\mathbf{1}i} + f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}c^{\mathbf{1}}a^{\mathbf{0}i} \\
 &= c^{\mathbf{0}}f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{0}i} + c^{\mathbf{0}}f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{1}j}a^{\mathbf{1}i} + c^{\mathbf{1}}f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{0}i} + c^{\mathbf{1}}f_{\mathbf{1}i}^{\mathbf{0}j}a^{\mathbf{1}i}
 \end{aligned}$$

Since $c^{\mathbf{k}}$, $a^{\mathbf{k}i}$ are arbitrary, then the equation (4.2) follows from equations (4.7), (4.8). \square

Theorem 4.3. Let \bar{e}_{iC} be C -basis of C -vector space A_i , $i = 1, 2$. Let \bar{e}_{iR} be corresponding R -basis of C -vector space A_i . The matrix of linear mapping

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

has form

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad &x_2^{\mathbf{0}j} = f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}x_1^{\mathbf{0}i} - f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}x_1^{\mathbf{1}i} \\
 &x_2^{\mathbf{1}j} = f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}x_1^{\mathbf{0}i} + f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j}x_1^{\mathbf{1}i}
 \end{aligned}$$

relative bases $\bar{e}_{1R}, \bar{e}_{2R}$ and has form

$$(4.10) \quad x_2^j = f_i^j x_1^i \quad f_i^j = f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{0}j} + f_{\mathbf{0}i}^{\mathbf{1}j}i$$

relative bases $\bar{e}_{1C}, \bar{e}_{2C}$

Proof. Since the mapping f is R -linear mapping, then relative basis $\bar{e}_{1R}, \bar{e}_{2R}$ mapping f has form

$$(4.11) \quad \begin{aligned} x_2^{0j} &= f_{0i}^{0j} x_1^{0i} + f_{1i}^{0j} x_1^{1i} \\ x_2^{1j} &= f_{0i}^{1j} x_1^{0i} + f_{1i}^{1j} x_1^{1i} \end{aligned}$$

The equation (4.9) follows from equations (4.2), (4.11). The equation (4.10) follows from equation (4.9) and comparing equations

$$\begin{aligned} (f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j}i)(x_1^{0i} + x_1^{1i}i) &= f_{0i}^{0j} x_1^{0i} - f_{0i}^{1j} x_1^{1i} + (f_{0i}^{1j} x_1^{0i} + f_{0i}^{0j} x_1^{1i})i \\ \begin{pmatrix} f_{0i}^{0j} & -f_{0i}^{1j} \\ f_{0i}^{1j} & f_{0i}^{0j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{0i} \\ x_1^{1i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{0i}^{0j} x_1^{0i} - f_{0i}^{1j} x_1^{1i} \\ f_{0i}^{1j} x_1^{0i} + f_{0i}^{0j} x_1^{1i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

The theorem 4.2 describes the structure of C -linear mapping of C -algebra A . However, there exist R -linear mappings of C -algebra A , which are not C -linear mappings.

5. ANTILINEAR MAPPING OF C -ALGEBRA

Definition 5.1. Morphism of C -vector spaces

$$(5.1) \quad I : z \in C \rightarrow z^* \in C \quad f : A_1 \rightarrow A_2$$

is called antilinear mapping.¹

□

Theorem 5.2. Let the mapping of C -vector spaces

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

be antilinear mapping. Then

$$(5.2) \quad f(ca) = c^* f(a) \quad c \in C \quad a \in A$$

Proof. According to construction in section [4]-1.5, the mapping I is morphism of R -algebra C . The equation (5.2) follows from the definition [5]-2.2.2, and the equation [5]-(2.2.4). □

If $c \in R$, then

$$f(ca) = cf(a)$$

because $c = c^*$. Therefore, antilinear mapping of C -algebra A is R -linear mapping.

Theorem 5.3 (The Cauchy-Riemann equations). *Matrix of antilinear mapping of C -vector spaces*

$$\begin{aligned} f : A_1 &\rightarrow A_2 \\ y^{ik} &= f_{jm}^{ik} x^{jm} \end{aligned}$$

satisfies relationship

$$(5.3) \quad \begin{aligned} f_{0i}^{0j} &= -f_{1i}^{1j} \\ f_{1i}^{0j} &= f_{0i}^{1j} \end{aligned}$$

¹There is similar definition in [7], p. 234.

Proof. From equations (3.11), (3.14), (3.15), it follows

$$\begin{aligned}
 (f(ca))^{0j} &= f_{0i}^{0j}(ca)^{0i} + f_{1i}^{0j}(ca)^{1i} \\
 (5.4) \quad &= f_{0i}^{0j}(c^0 a^{0i} - c^1 a^{1i}) + f_{1i}^{0j}(c^0 a^{1i} + c^1 a^{0i}) \\
 &= f_{0i}^{0j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{0j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^1 a^{0i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f(ca))^{1j} &= f_{0i}^{1j}(ca)^{0i} + f_{1i}^{1j}(ca)^{1i} \\
 (5.5) \quad &= f_{0i}^{1j}(c^0 a^{0i} - c^1 a^{1i}) + f_{1i}^{1j}(c^0 a^{1i} + c^1 a^{0i}) \\
 &= f_{0i}^{1j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{1j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^1 a^{0i}
 \end{aligned}$$

From equations (5.2), (3.11), (3.13), (3.14), (3.15), it follows

$$\begin{aligned}
 (c^* f(a))^{0j} &= c^0 (f(a))^{0j} + c^1 (f(a))^{1j} \\
 (5.6) \quad &= c^0 (f_{0i}^{0j} a^{0i} + f_{1i}^{0j} a^{1i}) + c^1 (f_{0i}^{1j} a^{0i} + f_{1i}^{1j} a^{1i}) \\
 &= c^0 f_{0i}^{0j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{0j} a^{1i} + c^1 f_{0i}^{1j} a^{0i} + c^1 f_{1i}^{1j} a^{1i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c^* f(a))^{1j} &= c^0 (f(a))^{1j} - c^1 (f(a))^{0j} \\
 (5.7) \quad &= c^0 (f_{0i}^{1j} a^{0i} + f_{1i}^{1j} a^{1i}) - c^1 (f_{0i}^{0j} a^{0i} + f_{1i}^{0j} a^{1i}) \\
 &= c^0 f_{0i}^{1j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{1j} a^{1i} - c^1 f_{0i}^{0j} a^{0i} - c^1 f_{1i}^{0j} a^{1i}
 \end{aligned}$$

From equations (5.2), (5.4), (5.6), it follows

$$\begin{aligned}
 (5.8) \quad &f_{0i}^{0j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{0j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^1 a^{0i} \\
 &= c^0 f_{0i}^{0j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{0j} a^{1i} + c^1 f_{0i}^{1j} a^{0i} + c^1 f_{1i}^{1j} a^{1i}
 \end{aligned}$$

From equations (5.2), (5.5), (5.7), it follows

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad &f_{0i}^{1j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{1j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^1 a^{0i} \\
 &= c^0 f_{0i}^{1j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{1j} a^{1i} - c^1 f_{0i}^{0j} a^{0i} - c^1 f_{1i}^{0j} a^{1i}
 \end{aligned}$$

Since c^k, a^{ki} are arbitrary, then the equation (5.3) follows from equations (5.8), (5.9). \square

Theorem 5.4. Let \bar{e}_{iC} be C-basis of C-vector space A_i , $i = 1, 2$. Let \bar{e}_{iR} be corresponding R-basis of C-vector space A_i . The matrix of antilinear mapping

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

has form

$$\begin{aligned}
 (5.10) \quad &x_2^{0j} = f_{0i}^{0j} x_1^{0i} + f_{0i}^{1j} x_1^{1i} \\
 &x_2^{1j} = f_{0i}^{1j} x_1^{0i} - f_{0i}^{0j} x_1^{1i}
 \end{aligned}$$

relative to bases $\bar{e}_{1R}, \bar{e}_{2R}$ and has form

$$(5.11) \quad x_2^j = f_i^j I \circ x_1^i \quad I \circ z = z^* \quad f_i^j = f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j} i$$

relative to bases $\bar{e}_{1C}, \bar{e}_{2C}$

Proof. Since the mapping f is R -linear mapping, then relative to bases $\bar{e}_{1R}, \bar{e}_{2R}$ mapping f has form

$$(5.12) \quad \begin{aligned} x_2^{0j} &= f_{0i}^{0j} x_1^{0i} + f_{1i}^{0j} x_1^{1i} \\ x_2^{1j} &= f_{0i}^{1j} x_1^{0i} + f_{1i}^{1j} x_1^{1i} \end{aligned}$$

The equation (5.10) follows from equations (5.3), (5.12). The equation (5.11) follows from the equation (5.10) and comparing of equations

$$\begin{aligned} (f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j} i) I \circ (x_1^{0i} + x_1^{1i} i) &= (f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j} i)(x_1^{0i} - x_1^{1i} i) \\ &= f_{0i}^{0j} x_1^{0i} + f_{0i}^{1j} x_1^{1i} + (f_{0i}^{1j} x_1^{0i} - f_{0i}^{0j} x_1^{1i}) i \\ \begin{pmatrix} f_{0i}^{0j} & f_{0i}^{1j} \\ f_{0i}^{1j} & -f_{0i}^{0j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{0i} \\ x_1^{1i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{0i}^{0j} x_1^{0i} + f_{0i}^{1j} x_1^{1i} \\ f_{0i}^{1j} x_1^{0i} - f_{0i}^{0j} x_1^{1i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

6. MORPHISM OF ALGEBRA

In this section, we consider algebra A over ring D . According to construction that was done in subsections [5]-4.4.2, [5]-4.4.3, a diagram of representations of D -algebra has form

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f_{1,2}} & A \xrightarrow{f_{2,3}} A \\ & & \uparrow f_{1,2} \\ & & D \end{array} \quad \begin{array}{l} f_{1,2}(d) : \bar{v} \rightarrow d\bar{v} \\ f_{2,3}(\bar{v}) : \bar{w} \rightarrow \bar{C}(\bar{v}, \bar{w}) \\ \bar{C} \in \mathcal{L}(A^2; A) \end{array}$$

On the diagram of representations (6.1), D is ring, A is Abelian group. We initially consider the vertical representation, and then we consider the horizontal representation. We assume that A is free $D\star$ -module ([1], p. 135). Therefore, vectors of basis \bar{e} of $D\star$ -module A are linear independent. Bilinear mapping

$$\bar{C} : A \times A \rightarrow A$$

has following representation relative basis \bar{e}

$$(6.2) \quad \bar{C}(\bar{v}, \bar{w}) = C_{ij}^{k} v^i w^j \bar{e}_k$$

According to the theorem [5]-4.4.1, bilinear mapping \bar{C} generates product in $D\star$ -algebra A

$$(6.3) \quad \bar{C}(\bar{v}, \bar{w}) = \bar{v} \bar{w}$$

and coordinates of bilinear mapping \bar{C} relative to the basis \bar{e} are structural constants of this product.

Theorem 6.1. *Let diagram of representations*

$$(6.4) \quad \begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f_{1,1,2}} & A_1 \xrightarrow{f_{1,2,3}} A_1 \\ & & \uparrow f_{1,1,2} \\ & & D_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} f_{1,1,2}(d) : \bar{v} \rightarrow d\bar{v} \\ f_{1,2,3}(\bar{v}) : \bar{w} \rightarrow \bar{C}_1(\bar{v}, \bar{w}) \\ \bar{C}_1 \in \mathcal{L}(A_1^2; A_1) \end{array}$$

describe $D_1\star$ -algebra A_1 . Let diagram of representations

$$(6.5) \quad \begin{array}{ccc} D_2 & \xrightarrow{f_{2,1,2}} & A_2 \xrightarrow{f_{2,2,3}} A_2 \\ & & \uparrow f_{2,1,2} \\ & & D_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} f_{2,1,2}(d) : \bar{v} \rightarrow d\bar{v} \\ f_{2,2,3}(\bar{v}) : \bar{w} \rightarrow \bar{C}_2(\bar{v}, \bar{w}) \\ \bar{C}_2 \in \mathcal{L}(A_2^2; A_2) \end{array}$$

describe $D_2\star$ -algebra A_2 . Morphism² of $D_1\star$ -algebra A_1 into $D_2\star$ -algebra A_2

$$r_1 : D_1 \rightarrow D_2 \quad \bar{r}_2 : A_1 \rightarrow A_2$$

is $D\star$ -linear mapping of $D_1\star$ -algebra A_1 into $D_2\star$ -algebra A_2 such that

$$(6.6) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{r}_2(\bar{a})\bar{r}_2(\bar{b})$$

Proof. According to equation [5]-(4.2.3), morphism (r_1, \bar{r}_2) of representation $f_{1,2}$ satisfies to the equation

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \bar{r}_2(f_{1,1,2}(d)(\bar{a})) &= f_{2,1,2}(r_1(d))(\bar{r}_2(\bar{a})) \\ \bar{r}_2(d\bar{a}) &= r_1(d)\bar{r}_2(\bar{a}) \end{aligned}$$

Therefore, the mapping (r_1, \bar{r}_2) is $D\star$ -linear mapping.

According to equation [5]-(4.2.3), the morphism (\bar{r}_2, \bar{r}_2) of representation $f_{2,3}$ satisfies to the equation³

$$(6.8) \quad \bar{r}_2(f_{1,2,3}(\bar{a}_2)(\bar{a}_3)) = f_{2,2,3}(\bar{r}_2(\bar{a}_2))(\bar{r}_2(\bar{a}_3))$$

From equations (6.8), (6.4), (6.5), it follows that

$$(6.9) \quad \bar{r}_2(\bar{C}_1(\bar{v}, \bar{w})) = \bar{C}_2(\bar{r}_2(\bar{v}), \bar{r}_2(\bar{w}))$$

Equation (6.6) follows from equations (6.9), (6.3). \square

Definition 6.2. The morphism of representations of $D_1\star$ -algebra A_1 into $D_2\star$ -algebra A_2 is called **$D\star$ -linear homomorphism** of $D_1\star$ -algebra A_1 into $D_2\star$ -algebra A_2 . \square

Theorem 6.3. Let \bar{e}_1 be the basis of $D_1\star$ -algebra A_1 . Let \bar{e}_2 be the basis of $D_2\star$ -algebra A_2 . Then linear homomorphism⁴ (r_1, \bar{r}_2) of $D_1\star$ -algebra A_1 into $D_2\star$ -algebra A_2 has presentation

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \bar{b} &= r_1(a)^* r_2^* \bar{e}_2 = r_1(a^j) r_2^i \bar{e}_{2,i} \\ b &= r_1(a)^* r_2 \end{aligned}$$

relative to selected bases. Here

- a is coordinate matrix of vector \bar{a} relative the basis \bar{e}_1 .

²In the remark [2]-4.4.5, I show that, when we study linear mapping, the choice of mapping r_1 may be limited to mapping

$$r_1 : D \rightarrow D \quad r_1(d) = d$$

However, in the section 10, I consider antilinear mapping of the algebra. That is why I wrote theorems in this section so that we can compare these theorems with theorems in section 10.

³Since in diagrams of representations (6.4), (6.5), supports of Ω_2 -algebra and Ω_3 -algebra coincide, then morphisms of representations on levels 2 and 3 coincide also.

⁴This theorem is similar to the theorem [2]-4.4.3.

- b is coordinate matrix of vector

$$\bar{b} = \bar{r}_2(\bar{a})$$

relative the basis $\bar{\bar{e}}_2$.

- r_2 is coordinate matrix of set of vectors $(\bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i}))$ relative the basis $\bar{\bar{e}}_2$.
The matrix r_2 is called **matrix of linear homomorphism** relative bases $\bar{\bar{e}}_1$ and $\bar{\bar{e}}_2$.

Proof. Vector $\bar{a} \in A_1$ has expansion

$$\bar{a} = a^* \bar{e}_1$$

relative to the basis $\bar{\bar{e}}_1$. Vector $\bar{b} \in A_2$ has expansion

$$(6.11) \quad \bar{b} = b^* \bar{e}_2$$

relative to the basis $\bar{\bar{e}}_2$.

Since (r_1, \bar{r}_2) is a linear homomorphism, then from (6.7), it follows that

$$(6.12) \quad \bar{b} = \bar{r}_2(\bar{a}) = \bar{r}_2(a^* \bar{e}_1) = r_1(a)^* \bar{r}_2(\bar{e}_1)$$

where

$$r_1(a) = \begin{pmatrix} r_1(a^1) \\ \dots \\ r_1(a^n) \end{pmatrix}$$

$\bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i})$ is also a vector of $D\star$ -module A_2 and has expansion

$$(6.13) \quad \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i}) = r_{2 \cdot i}^* \bar{e}_2 = r_{2 \cdot i}^j \bar{e}_j$$

relative to basis $\bar{\bar{e}}_2$. Combining (6.12) and (6.13) we get

$$(6.14) \quad \bar{b} = r_1(a)^* r_{2 \cdot i}^* \bar{e}_2$$

(6.10) follows from comparison of (6.11) and (6.14) and theorem [2]-4.3.3. \square

Theorem 6.4. Let $\bar{\bar{e}}_1$ be the basis of $D_1\star$ -algebra A_1 . Let $\bar{\bar{e}}_2$ be the basis of $D_2\star$ -algebra A_2 . If the mapping r_1 is injection, then there is relation between the matrix of linear homomorphism and structural constants

$$(6.15) \quad r_1(C_{1 \cdot i j}^k) r_{2 \cdot k}^l = r_{2 \cdot i}^p r_{2 \cdot j}^q C_{2 \cdot p q}^l$$

Proof. Let

$$\bar{a}, \bar{b} \in A_1 \quad \bar{a} = a^* \bar{e}_1 \quad \bar{b} = b^* \bar{e}_1$$

From equations (6.2), (6.3), (6.4), it follows that

$$(6.16) \quad \bar{a}\bar{b} = a^i b^j C_{1 \cdot i j}^k \bar{e}_{1 \cdot k}$$

From equations (6.7), (6.16), it follows that

$$(6.17) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = r_1(C_{1 \cdot i j}^k a^i b^j) \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot k})$$

Since the mapping r_1 is homomorphism of rings, then from equation (6.17), it follows that

$$(6.18) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = r_1(C_{1 \cdot i j}^k) r_1(a^i) r_1(b^j) \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot k})$$

From the theorem 6.3 and the equation (6.18), it follows that

$$(6.19) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = r_1(C_{1 \cdot i j}^k) r_1(a^i) r_1(b^j) r_{2 \cdot k}^l \bar{e}_{2 \cdot l}$$

From the equation (6.6) and the theorem 6.3, it follows that

$$(6.20) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{r}_2(\bar{a})\bar{r}_2(\bar{b}) = r_1(a^i)r_{2,i}^p\bar{e}_{2,p}r_1(b^j)r_{2,j}^q\bar{e}_{2,q}$$

From equations (6.2), (6.3), (6.5), (6.20), it follows that

$$(6.21) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = r_1(a^i)r_{2,i}^p r_1(b^j)r_{2,j}^q C_{2,pq}^l \bar{e}_{2,l}$$

From equations (6.19), (6.21), it follows that

$$(6.22) \quad r_1(C_{1,ij}^k)r_1(a^i)r_1(b^j)r_{2,k}^l\bar{e}_{2,l} = r_1(a^i)r_{2,i}^p r_1(b^j)r_{2,j}^q C_{2,pq}^l \bar{e}_{2,l}$$

The equation (6.15) follows from the equation (6.22), because vectors of basis \bar{e}_2 are linear independent, and a^i, b^i (and therefore, $r_1(a^i), r_1(b^i)$) are arbitrary values. \square

7. LINEAR AUTOMORPHISM OF QUATERNION ALGEBRA

Determining of coordinates of linear automorphism is not a simple task. In this section we consider example of nontrivial linear automorphism of quaternion algebra.

Theorem 7.1. *Coordinates of linear automorphism of quaternion algebra satisfy to the system of equations*

$$(7.1) \quad \begin{cases} r_1^1 = r_2^2 r_3^3 - r_2^3 r_3^2 & r_1^2 = r_3^2 r_1^3 - r_3^3 r_1^2 & r_1^3 = r_1^2 r_2^3 - r_1^3 r_2^2 \\ r_1^2 = r_2^3 r_1^1 - r_2^1 r_3^3 & r_1^3 = r_3^3 r_1^2 - r_3^2 r_1^1 & r_1^3 = r_1^3 r_2^1 - r_1^1 r_2^3 \\ r_1^3 = r_2^1 r_3^2 - r_2^2 r_3^1 & r_1^3 = r_3^1 r_2^2 - r_3^2 r_2^1 & r_1^3 = r_1^1 r_2^2 - r_1^2 r_2^1 \end{cases}$$

Proof. According to the theorems [4]-3.3.1, 6.4, linear automorphism of quaternion algebra satisfies to equations

$$(7.2) \quad \begin{aligned} r_0^l &= r_0^p r_0^q C_{pq}^l & r_1^l &= r_0^p r_1^q C_{pq}^l & r_2^l &= r_0^p r_2^q C_{pq}^l & r_3^l &= r_0^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_1^l &= r_1^p r_0^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_1^p r_1^q C_{pq}^l & r_3^l &= r_1^p r_2^q C_{pq}^l & -r_2^l &= r_1^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_2^l &= r_2^p r_0^q C_{pq}^l & -r_3^l &= r_2^p r_1^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_2^p r_2^q C_{pq}^l & r_0^l &= r_2^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_3^l &= r_3^p r_0^q C_{pq}^l & r_2^l &= r_3^p r_1^q C_{pq}^l & -r_1^l &= r_3^p r_2^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_3^p r_3^q C_{pq}^l \end{aligned}$$

From the equation (7.2), it follows that

$$(7.3) \quad \begin{aligned} r_1^l &= r_0^p r_1^q C_{pq}^l = r_2^p r_3^q C_{pq}^l & r_0^p r_1^q C_{pq}^l &= r_0^p r_1^q C_{qp}^l & r_2^p r_3^q C_{pq}^l &= -r_2^p r_3^q C_{qp}^l \\ r_2^l &= r_0^p r_2^q C_{pq}^l = r_3^p r_1^q C_{pq}^l & r_0^p r_2^q C_{pq}^l &= r_0^p r_2^q C_{qp}^l & r_3^p r_1^q C_{pq}^l &= -r_3^p r_1^q C_{qp}^l \\ r_3^l &= r_0^p r_3^q C_{pq}^l = r_1^p r_2^q C_{pq}^l & r_0^p r_3^q C_{pq}^l &= r_0^p r_3^q C_{qp}^l & r_1^p r_2^q C_{pq}^l &= -r_1^p r_2^q C_{qp}^l \end{aligned}$$

$$(7.4) \quad r_0^l = r_0^p r_0^q C_{pq}^l = -r_1^p r_1^q C_{pq}^l = -r_2^p r_2^q C_{pq}^l = -r_3^p r_3^q C_{pq}^l$$

If $l = 0$, then from the equation

$$C_{pq}^0 = C_{qp}^0$$

it follows that

$$(7.5) \quad r_i^p r_j^q C_{pq}^0 = r_i^p r_j^q C_{qp}^0$$

From the equation (7.3) for $l = 0$ and the equation (7.5), it follows that

$$(7.6) \quad r_1^0 = r_2^0 = r_3^0 = 0$$

If $l = 1, 2, 3$, then we can write the equation (7.3) in the following form

$$(7.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^l r_i^0 C_{i0}^l + r_0^0 r_i^l C_{0i}^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ba}^l \\ \quad r_0^l r_i^0 C_{i0}^l + r_0^0 r_i^l C_{0i}^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ba}^l \\ = r_0^l r_i^0 C_{0i}^l + r_0^0 r_i^l C_{i0}^l + r_0^a r_i^b C_{ba}^l + r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^0 r_j^l C_{0l}^l + r_k^l r_j^0 C_{l0}^l + r_k^a r_j^b C_{ab}^l + r_k^b r_j^a C_{ba}^l \\ \quad r_k^0 r_j^l C_{0l}^l + r_k^l r_j^0 C_{l0}^l + r_k^a r_j^b C_{ab}^l + r_k^b r_j^a C_{ba}^l \\ = -r_k^0 r_j^l C_{l0}^l - r_k^l r_j^0 C_{0l}^l - r_k^a r_j^b C_{ba}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ \quad i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ \quad i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

From equations (7.7), (7.6) and equations

$$(7.8) \quad \begin{aligned} C_{0l}^l &= C_{l0}^l = 1 \\ C_{ab}^l &= -C_{ba}^l \end{aligned}$$

it follows that

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^0 r_i^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l - r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad r_0^0 r_i^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l - r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ = r_0^0 r_i^l - r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ \quad i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ \quad i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

From equations (7.9) it follows that

$$(7.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^0 r_i^l \\ r_0^a r_i^b - r_0^b r_i^a = 0 \\ i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

From the equation (7.10) it follows that

$$(7.11) \quad r_0^0 = 1$$

From the equation (7.4) for $l = 0$, it follows that

$$(7.12) \quad \begin{aligned} r_0^0 &= r_0^0 r_0^0 - r_0^1 r_0^1 - r_0^2 r_0^2 - r_0^3 r_0^3 \\ &= -r_i^0 r_i^0 + r_i^1 r_i^1 + r_i^2 r_i^2 + r_i^3 r_i^3 \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

From equations (7.6), (7.10), (7.12), it follows that

$$(7.13) \quad \begin{aligned} 0 &= r_0^1 r_0^1 + r_0^2 r_0^2 + r_0^3 r_0^3 \\ 1 &= r_i^1 r_i^1 + r_i^2 r_i^2 + r_i^3 r_i^3 \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

From equations (7.13) it follows that⁵

$$(7.14) \quad r_0^1 = r_0^2 = r_0^3 = 0$$

From the equation (7.4) for $l > 0$, it follows that

$$(7.15) \quad \begin{aligned} r_0^l &= r_0^l r_0^0 C_{l0}^l + r_0^0 r_0^l C_{0l}^l + r_0^a r_0^b C_{ab}^l + r_0^b r_0^a C_{ba}^l \\ &= -r_i^l r_i^0 C_{l0}^l - r_i^0 r_i^l C_{0l}^l - r_i^a r_i^b C_{ab}^l - r_i^b r_i^a C_{ba}^l \\ i &> 0 \\ l &> 0 \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{aligned}$$

⁵Here, we rely on the fact that quaternion algebra is defined over real field. If we consider quaternion algebra over complex field, then the equation (7.13) defines a cone in the complex space. Correspondingly, we have wider choice of coordinates of linear automorphism.

Equations (7.15) are identically true by equations (7.6), (7.14), (7.8). From equations (7.14), (7.10), it follows that

$$(7.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ l > 0 \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

Equations (7.1) follow from equations (7.16). \square

Example 7.2. It is evident that coordinates

$$r_j^i = \delta_j^i$$

satisfy the equation (7.1). It can be verified directly that coordinates of mapping

$$r_0^0 = 1 \quad r_2^1 = 1 \quad r_3^2 = 1 \quad r_1^3 = 1$$

also satisfy the equation (7.1). The matrix of coordinates of this mapping has form

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

According to the theorem [4]-3.3.4, standard components of the mapping r have form

$$\begin{array}{llll} r^{00} = \frac{1}{4} & r^{11} = -\frac{1}{4} & r^{22} = -\frac{1}{4} & r^{33} = -\frac{1}{4} \\ r^{10} = -\frac{1}{4} & r^{01} = \frac{1}{4} & r^{32} = -\frac{1}{4} & r^{23} = -\frac{1}{4} \\ r^{20} = -\frac{1}{4} & r^{31} = -\frac{1}{4} & r^{02} = \frac{1}{4} & r^{13} = -\frac{1}{4} \\ r^{30} = -\frac{1}{4} & r^{21} = -\frac{1}{4} & r^{12} = -\frac{1}{4} & r^{03} = \frac{1}{4} \end{array}$$

Therefore, the mapping r has form

$$\begin{aligned} r(a) &= a^0 + a^2 i + a^3 j + a^1 k \\ r(a) &= \frac{1}{4}(a - iai - jaj - kak - ia + ai - kaj - jak \\ &\quad - ja - kai + aj - iak - ka - jai - iaj + ak) \end{aligned}$$

\square

8. RING WITH CONJUGATION

Let there exist commutative subring F of ring D such that $F \neq D$ and ring D is a free finite dimensional module over the ring F . Let \bar{e} be the basis of free module D over ring F . We assume that $\bar{e}_0 = 1$.

Theorem 8.1. *The ring D is F -algebra.*

Proof. Consider mapping

$$(8.1) \quad f : D \times D \rightarrow D \quad a, b \in D \rightarrow ab \in D$$

Since the product is distributive over addition, then

$$(8.2) \quad \begin{aligned} f(a_1 + a_2, b) &= (a_1 + a_2)b = a_1b + a_2b = f(a_1, b) + f(a_2, b) \\ f(a, b_1 + b_2) &= a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2 = f(a, b_1) + f(a, b_2) \end{aligned}$$

If $a \in F$, then

$$(8.3) \quad \begin{aligned} f(ab, c) &= (ab)c = a(bc) = af(b, c) \\ f(b, ac) &= b(ac) = (ba)c = (ab)c = a(bc) = af(b, c) \end{aligned}$$

From equations (8.2), (8.3), it follows that the mapping f is bilinear mapping over the ring F . According to the definition [4]-2.2.1, the ring D is F -algebra. \square

Corollary 8.2. *The ring F is subalgebra of F -algebra D .* \square

Consider mappings

$$\begin{aligned} \text{Re} : D &\rightarrow D \\ \text{Im} : D &\rightarrow D \end{aligned}$$

defined by equation

$$(8.4) \quad \text{Re } d = d^0 \quad \text{Im } d = d - d^0 \quad d \in D \quad d = d^i \bar{e}_i$$

The expression $\text{Re } d$ is called **scalar of element d** . The expression $\text{Im } d$ is called **vector of element d** .

According to (8.4)

$$F = \{d \in D : \text{Re } d = d\}$$

We will use notation $\text{Re } D$ to denote **scalar algebra of ring D** .

Theorem 8.3. *The set*

$$(8.5) \quad \text{Im } D = \{d \in D : \text{Re } d = 0\}$$

*is $(\text{Re } D)$ -module which is called **vector module of ring D** .*

$$(8.6) \quad D = \text{Re } D \oplus \text{Im } D$$

Proof. Let $c, d \in \text{Im } D$. Then $c_0 = d_0 = 0$. Therefore,

$$(c + d)_0 = c_0 + d_0 = 0$$

If $a \in \text{Re } D$, then

$$(ad)_0 = ad_0 = 0$$

Therefore, $\text{Im } D$ is $(\text{Re } D)$ -module.

Sequence of modules

$$0 \longrightarrow \text{Re } D \xrightarrow{\text{id}} D \xrightarrow{\text{Im}} \text{Im } D \longrightarrow 0$$

is exact sequence. According to the definition (8.4) of the mapping Re , following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} \text{Re } D & \xrightarrow{\text{id}} & D \\ \text{id} \downarrow & \searrow \text{Re} & \\ \text{Re } D & & \end{array}$$

According to the statement 2 of the proposition [1]-III.3.2,

$$(8.7) \quad D = \text{id}(\text{Re } D) \oplus \ker \text{Re}$$

According to the definition (8.5)

$$(8.8) \quad \ker \text{Re} = \{d \in D : \text{Re } d = 0\} = \text{Im } D$$

The equation (8.6) follows from the equations (8.7), (8.8). \square

According to the theorem 8.3, there is unique defined representation

$$(8.9) \quad d = \text{Re } d + \text{Im } d$$

Definition 8.4. The mapping

$$(8.10) \quad d^* = \text{Re } d - \text{Im } d$$

is called **conjugation in ring** provided that this mapping satisfies

$$(8.11) \quad (cd)^* = d^* c^*$$

The ring D equipped with conjugation is called **ring with conjugation**. \square

According to the theorem 8.1, the ring with conjugation D is associative $(\text{Re } D)$ -algebra, which we also call **algebra with conjugation**.

Corollary 8.5.

$$(8.12) \quad (d^*)^* = d$$

\square

It is evident that there exist rings where condition (8.11) is not fulfilled. To understand the properties of a ring with conjugation we consider structural constants of $(\text{Re } D)$ -algebra D . The equation

$$(8.13) \quad C_{0k}^l = C_{k0}^l = \delta_l^k$$

follows from the equation $1d = d1 = d$.

Theorem 8.6. *The ring D is ring with conjugation if*

$$(8.14) \quad C_{kl}^0 = C_{lk}^0 \quad C_{kl}^p = -C_{lk}^p$$

$$1 < k < n \quad 1 < l < n \quad 1 < p < n$$

Proof. From equations (8.9), (8.10) it follows that

$$\begin{aligned} (8.15) \quad (cd)^* &= (\text{Re } c \text{ Re } d + \text{Re } c \text{ Im } d + \text{Im } c \text{ Re } d + \text{Im } c \text{ Im } d)^* \\ &= \text{Re } c \text{ Re } d - \text{Re } c \text{ Im } d - \text{Im } c \text{ Re } d + (\text{Im } c \text{ Im } d)^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8.16) \quad d^* c^* &= (\operatorname{Re} d - \operatorname{Im} d)(\operatorname{Re} c - \operatorname{Im} c) \\
 &= \operatorname{Re} d \operatorname{Re} c - \operatorname{Re} d \operatorname{Im} c - \operatorname{Im} d \operatorname{Re} c + \operatorname{Im} d \operatorname{Im} c
 \end{aligned}$$

Therefore, from the equation (8.11), it follows that

$$(8.17) \quad (\operatorname{Im} c \operatorname{Im} d)^* = \operatorname{Im} d \operatorname{Im} c$$

Let \bar{e} be the basis of the $(\operatorname{Re} D)$ -algebra D . From the equation (8.17), it follows that

$$\begin{aligned}
 (8.18) \quad (C_{kl}^0 c^k d^l + C_{kl}^p c^k d^l \bar{e}_p)^* &= C_{kl}^0 c^k d^l - C_{kl}^p c^k d^l \bar{e}_p \\
 &= C_{kl}^0 d^k c^l + C_{kl}^p d^k c^l \bar{e}_p
 \end{aligned}$$

$$1 < k < n \quad 1 < l < n \quad 1 < p < n$$

The equation (8.14) follows from the equation (8.18). \square

Corollary 8.7.

$$\bar{e}_k \bar{e}_k \in \operatorname{Re} D$$

\square

We can represent the conjugation using the matrix I

$$\begin{aligned}
 (8.19) \quad d^* &= I \circ d \quad I_k^0 = \delta_k^0 \quad I_0^k = \delta_0^k \quad k = 0, \dots, n \\
 I_k^m &= -\delta_k^m \quad I_m^k = -\delta_m^k \quad m = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Example 8.8. The product in the set of complex numbers C is commutative. However, complex field has subfield R . The vector space $\operatorname{Im} C$ has dimension 1 and the basis $\bar{e}_1 = i$. Accordingly

$$c^* = c^0 - c^1 i$$

\square

Example 8.9. The division ring of quaternions H has subfield R . The vector space $\operatorname{Im} H$ has dimension 3 and the basis

$$\bar{e}_1 = i \quad \bar{e}_2 = j \quad \bar{e}_3 = k$$

Accordingly

$$d^* = d^0 - d^1 i - d^2 j - d^3 k$$

\square

9. LINEAR MAPPING OF ALGEBRA WITH CONJUGATION

We can consider the ring D as $D\star$ -module of dimension 1.

Theorem 9.1. $D\star$ -linear mapping of the ring with conjugation D has form

$$(9.1) \quad f(c) = cd \quad d \in D$$

Let \bar{e} be $(\operatorname{Re} D)$ -basis of the ring D . Coordinates of the mapping f

$$(9.2) \quad f(c) = c^l f_l^i \bar{e}_i$$

relative to the basis \bar{e} satisfy to the equation

$$(9.3) \quad f_k^j = f_0^i C_{ki}^j$$

$$(9.4) \quad d = f_0^i \bar{e}_i$$

Proof. (Re D)-linear mapping satisfies to equations

$$(9.5) \quad f(ac) = (ac)^i f_i^j \bar{e}_j = a^k c^l C_{kl}^i f_i^j \bar{e}_j$$

$$(9.6) \quad af(c) = a^k (f(c))^i C_{ki}^j \bar{e}_j = a^k c^l f_l^i C_{ki}^j \bar{e}_j$$

From equations (9.5), (9.6), it follows that

$$(9.7) \quad a^k c^l C_{kl}^i f_i^j \bar{e}_j = a^k c^l f_l^i C_{ki}^j \bar{e}_j$$

The equation

$$(9.8) \quad C_{kl}^i f_i^j = f_l^i C_{ki}^j$$

follows from the equation (9.7).

From the equation (9.8) it follows that⁶

$$(9.9) \quad C_{k0}^i f_i^j = f_0^i C_{ki}^j$$

From equations (8.13), (9.9), it follows that

$$(9.10) \quad \delta_k^i f_i^j = f_0^i C_{ki}^j$$

The equation (9.3) follows from the equation (9.10).

From equations (9.2), (9.3), it follows that

$$(9.11) \quad f(c) = c^l f_0^j C_{lj}^i \bar{e}_i$$

The equation (9.4) follows from the equations (9.1), (9.11). \square

Definition 9.2. Let D be the ring with conjugation. The mapping

$$f : D \rightarrow D$$

is called $D\star$ -antilinear,⁷ if the mapping f satisfies to the equation

$$(9.12) \quad f(da) = f(a)d^*$$

\square

Theorem 9.3. $D\star$ -antilinear mapping of the ring with conjugation D has form

$$(9.13) \quad f(c) = dc^* = dI \circ c \quad d \in D$$

Let \bar{e} be (Re D)-basis of the ring D . Coordinates of the mapping f

$$(9.14) \quad f(c) = c^l f_l^i \bar{e}_i$$

relative to the basis \bar{e} satisfy to the equation

$$(9.15) \quad f_l^j = f_0^k I_l^i C_{ki}^j$$

$$(9.16) \quad d = f_0^i \bar{e}_i$$

⁶Let $l = 0$.

⁷I made the definition 9.2 by analogy with the definition 5.1. This definition also takes into account the requirements for antilinear homomorphism in the definition 10.2.

Proof. (Re D)-linear mapping satisfies to equations

$$(9.17) \quad f(ac) = ((ac)^*)^i f_i^j \bar{e}_j = c^p a^q (C_{pq}^i)^* f_i^j \bar{e}_j$$

$$(9.18) \quad \begin{aligned} f(c)a^* &= (f(c))^k (a^*)^i C_{ki}^j \bar{e}_j = (c^*)^l f_l^k (a^*)^i C_{ki}^j \bar{e}_j \\ &= I_p^l c^p f_l^k I_q^i a^q C_{ki}^j \bar{e}_j \end{aligned}$$

From equations (9.17), (9.18), it follows that

$$(9.19) \quad c^p a^q (C_{pq}^i)^* f_i^j \bar{e}_j = I_p^l c^p f_l^k I_q^i a^q C_{ki}^j \bar{e}_j$$

The equation

$$(9.20) \quad (C_{pq}^i)^* f_i^j = I_p^l f_l^k I_q^i C_{ki}^j$$

follows from the equation (9.19).

From the equation (9.20) it follows that⁸

$$(9.21) \quad (C_{0q}^i)^* f_i^j = I_0^l f_l^k I_q^i C_{ki}^j$$

From equations (8.13), (8.19), (9.21), it follows that

$$(9.22) \quad \delta_q^i f_i^j = \delta_0^l f_l^k I_q^i C_{ki}^j$$

The equation (9.15) follows from the equation (9.22).

From equations (9.14), (9.15), it follows that

$$(9.23) \quad f(c) = c^l f_0^k I_l^i C_{ki}^j \bar{e}_j = f_0^k I_l^i c^l C_{ki}^j \bar{e}_j = f_0^k (c^*)^i C_{ki}^j \bar{e}_j$$

The equation (9.16) follows from the equations (9.1), (9.23). □

Theorem 9.4. *If mapping*

$$f : D \rightarrow D$$

is $D\star$ -linear mapping, then mapping

$$g : D \rightarrow D \quad g(d) = (f(d))^*$$

is $D\star$ -antilinear mapping.

Proof. The theorem follows from the equation

$$g(cd) = (f(cd))^* = (cf(d))^* = (f(d))^* c^* = g(d) c^*$$

and the definition 9.2. □

10. ANTILINEAR HOMOMORPHISM OF $D\star$ -ALGEBRA

In this section D is a ring with conjugation.

Theorem 10.1. *Let diagram of representations*

$$(10.1) \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f_{1 \cdot 1, 2}} & A_1 \xrightarrow{f_{1 \cdot 2, 3}} A_1 \\ & & \uparrow f_{1 \cdot 1, 2} \\ & & D \end{array} \quad \begin{array}{l} f_{1 \cdot 1, 2}(d) : \bar{v} \rightarrow d\bar{v} \\ f_{1 \cdot 2, 3}(\bar{v}) : \bar{w} \rightarrow \bar{C}_1(\bar{v}, \bar{w}) \\ \bar{C}_1 \in \mathcal{L}(A_1^2; A_1) \end{array}$$

⁸Let $p = 0$.

describe $D\star$ -algebra A_1 . Let diagram of representations

$$(10.2) \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f_{2,1,2}} & A_2 \xrightarrow{f_{2,2,3}} A_2 \\ & & \uparrow f_{2,1,2} \\ & & D \end{array} \quad \begin{array}{l} f_{2,1,2}(d) : \bar{v} \rightarrow \bar{v} d \\ f_{2,2,3}(\bar{v}) : \bar{w} \rightarrow \bar{C}_2(\bar{w}, \bar{v}) \\ \bar{C}_2 \in \mathcal{L}(A_2^2; A_2) \end{array}$$

describe $\star D$ -algebra A_2 . Morphism of $D\star$ -algebra A_1 into $\star D$ -algebra A_2

$$\begin{aligned} r_1 : D &\rightarrow D & \bar{r}_2 : A_1 &\rightarrow A_2 \\ r_1(d) &= d^* \end{aligned}$$

is $D\star$ -antilinear mapping of $D\star$ -algebra A_1 into $\star D$ -algebra A_2 such that

$$(10.3) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{r}_2(\bar{b})\bar{r}_2(\bar{a})$$

Proof. According to equation [5]-(4.2.3), morphism (r_1, \bar{r}_2) of representation $f_{1,2}$ satisfies to the equation

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \bar{r}_2(f_{1,1,2}(d)(\bar{a})) &= f_{2,1,2}(r_1(d))(\bar{r}_2(\bar{a})) \\ \bar{r}_2(d\bar{a}) &= \bar{r}_2(\bar{a})d^* \end{aligned}$$

Therefore, the mapping (r_1, \bar{r}_2) is $D\star$ -antilinear mapping.

According to equation [5]-(4.2.3), the morphism (\bar{r}_2, \bar{r}_2) of representation $f_{2,3}$ satisfies to the equation⁹

$$(10.5) \quad \bar{r}_2(f_{1,2,3}(\bar{a}_2)(\bar{a}_3)) = f_{2,2,3}(\bar{r}_2(\bar{a}_2))(\bar{r}_2(\bar{a}_3))$$

From equations (10.5), (10.1), (10.2), it follows that

$$(10.6) \quad \bar{r}_2(\bar{C}_1(\bar{v}, \bar{w})) = \bar{C}_2(\bar{r}_2(\bar{w}), \bar{r}_2(\bar{v}))$$

Equation (10.3) follows from equations (10.6), (6.3). \square

Definition 10.2. The morphism of representations of $D\star$ -algebra A_1 into $\star D$ -algebra A_2 is called **$D\star$ -antilinear homomorphism** of $D\star$ -algebra A_1 into $\star D$ -algebra A_2 . \square

Theorem 10.3. Let \bar{e}_1 be the basis of $D\star$ -algebra A_1 . Let \bar{e}_2 be the basis of $\star D$ -algebra A_2 . Then antilinear homomorphism¹⁰ (r_1, \bar{r}_2) of $D\star$ -algebra A_1 into $\star D$ -algebra A_2 has presentation¹¹

$$(10.7) \quad \begin{aligned} \bar{b} &= \bar{e}_2 * r_2 * r_1(a) = \bar{e}_2 \cdot \bar{i} r_2 \cdot \bar{j} r_1(a^{\bar{j}}) \\ b &= r_2 * r_1(a) \end{aligned}$$

relative to selected bases. Here

- a is coordinate matrix of vector \bar{a} relative the basis \bar{e}_1 .
- b is coordinate matrix of vector

$$\bar{b} = \bar{r}_2(\bar{a})$$

relative the basis \bar{e}_2 .

⁹Since in diagrams of representations (6.4), (6.5), supports of Ω_2 -algebra and Ω_3 -algebra coincide, then morphisms of representations on levels 2 and 3. coincide also

¹⁰This theorem is similar to the theorem [2]-4.4.3.

¹¹For complex field, the equation (5.11) is consequence of the equation (10.7).

- r_2 is coordinate matrix of set of vectors $(\bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i}))$ relative the basis \bar{e}_2 .
The matrix r_2 is called **matrix of antilinear homomorphism** relative bases \bar{e}_1 and \bar{e}_2 .

Proof. Vector $\bar{a} \in A_1$ has expansion

$$\bar{a} = a^* *_1 \bar{e}_1$$

relative to the basis \bar{e}_1 . Vector $\bar{b} \in A_2$ has expansion

$$(10.8) \quad \bar{b} = \bar{e}_2 *_2 b$$

relative to the basis \bar{e}_2 .

Since (r_1, \bar{r}_2) is an antilinear homomorphism, then from (10.4), it follows that

$$(10.9) \quad \bar{b} = \bar{r}_2(\bar{a}) = \bar{r}_2(a^* *_1 \bar{e}_1) = \bar{r}_2(\bar{e}_1)_*^* a^*$$

where

$$a^* = \begin{pmatrix} (a^1)^* \\ \dots \\ (a^n)^* \end{pmatrix}$$

$\bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i})$ is also a vector of $\star D$ -module A_2 and has expansion

$$(10.10) \quad \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i}) = \bar{e}_2 *_2 r_{2 \cdot i} = \bar{e}_j r_{2 \cdot i}^j$$

relative to basis \bar{e}_2 . Combining (10.9) and (10.10) we get

$$(10.11) \quad \bar{b} = \bar{e}_2 \circ r_{2 \circ} a^*$$

(10.7) follows from comparison of (10.8) and (10.11) and theorem [2]-4.3.3. \square

Theorem 10.4. *Let \bar{e}_1 be the basis of $D\star$ -algebra A_1 . Let \bar{e}_2 be the basis of $\star D$ -algebra A_2 . There exists relation between the matrix of antilinear homomorphism and structural constants*

$$(10.12) \quad (C_{1 \cdot ij}^k)^* r_{2 \cdot k}^l = r_{2 \cdot j}^p r_{2 \cdot i}^q C_{2 \cdot pq}^l$$

Proof. Let

$$\bar{a}, \bar{b} \in A_1 \quad \bar{a} = a^* *_1 \bar{e}_1 \quad \bar{b} = b^* *_1 \bar{e}_1$$

From equations (6.2), (6.3), (10.1), it follows that

$$(10.13) \quad \bar{a}\bar{b} = a^i b^j C_{1 \cdot ij}^k \bar{e}_{1 \cdot k}$$

From equations (10.4), (10.13), it follows that

$$(10.14) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot k})(a^i b^j C_{1 \cdot ij}^k)^* = \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot k})(C_{1 \cdot ij}^k)^*(b^j)^*(a^i)^*$$

From the theorem 10.3 and the equation (10.14), it follows that

$$(10.15) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{e}_{2 \cdot l} r_{2 \cdot k}^l (C_{1 \cdot ij}^k)^*(a^i)^*(b^j)^*$$

From the equation (10.3) and the theorem 10.3, it follows that

$$(10.16) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{r}_2(\bar{b})\bar{r}_2(\bar{a}) = \bar{e}_{2 \cdot q} r_{2 \cdot j}^q (b^j)^* \bar{e}_{2 \cdot p} r_{2 \cdot i}^p (a^i)^*$$

From equations (6.2), (6.3), (10.2), (10.16), it follows that

$$(10.17) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{e}_{2 \cdot l} C_{2 \cdot pq}^l r_{2 \cdot i}^p (a^i)^* r_{2 \cdot j}^q (b^j)^*$$

From equations (10.15), (10.17), it follows that

$$(10.18) \quad \bar{e}_{2 \cdot l} r_{2 \cdot k}^l (C_{1 \cdot ij}^k)^* (a^i)^* (b^j)^* = \bar{e}_{2 \cdot l} C_{2 \cdot pq}^l r_{2 \cdot i}^p (a^i)^* r_{2 \cdot j}^q (b^j)^*$$

The equation (10.12) follows from the equation (10.18), because vectors of the basis \bar{e}_2 are linear independent, and a^i, b^i (and therefore, $r_1(a^i), r_1(b^i)$) are arbitrary values. \square

11. INVOLUTION OF BANACH D -ALGEBRA

In this section D is a ring with conjugation. We also will assume that there is structure of $D\star$ -module and $\star D$ -module in Abelian group A .¹²

Definition 11.1. Let A be a Banach D -algebra. Involution is an antilinear homomorphism $x \rightarrow x^*, x \in A$, satisfying

$$(11.1) \quad \begin{aligned} x^{**} &= x \\ \|x^* x\| &= \|x\|^2 \\ x, y &\in A \end{aligned}$$

\square

Theorem 11.2. Let A be a Banach D -algebra. Let mapping $x \rightarrow x^*, x \in A$, be involution. Then

$$(11.2) \quad (xy)^* = y^* x^*$$

Proof. The equation (11.2) is consequence of the definition 11.1 and the theorem 10.1. \square

Definition 11.3. The basis \bar{e} is called normal basis, if $\|\bar{e}_i\| = 1$ for any vector \bar{e}_i of the basis \bar{e} . \square

Without loss of generality, we can assume that the basis \bar{e} is normal basis. If we assume that the norm of the vector \bar{e}_i is different from 1, then we can replace this vector by the vector

$$\bar{e}'_i = \frac{1}{\|\bar{e}_i\|} \bar{e}_i$$

Theorem 11.4. Let D be commutative ring. If the mapping

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

is linear mapping, then the mapping

$$h(x) = f(x^*)$$

is antilinear mapping. If the mapping

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

is linear homomorphism, then the mapping

$$h(x) = f(x^*)$$

is antilinear homomorphism.

¹²Conditions when this requirement is fulfilled, will be discussed in a separate paper. This condition is evident if D is field. This condition is satisfied according to the theorem [2]-6.3.1 if D is division ring.

Proof. According to the theorem 10.1 and the equation (10.4)

$$(11.3) \quad (da)^* = a^* d^* \quad d \in D \quad a \in A$$

If f is linear mapping, then

$$(11.4) \quad f(dx) = df(x)$$

From equations (11.3), (11.4), it follows that

$$h(xd) = f((xd)^*) = f(d^* x^*) = d^* f(x^*) = d^* h(x)$$

If f is linear homomorphism, then from equations (6.6), (11.2), it follows that

$$h(ab) = f((ab)^*) = f(b^* a^*) = f(b^*)f(a^*) = h(b)h(a)$$

Therefore, h is antilinear homomorphism. \square

12. C*-ALGEBRA

Definition 12.1. A C*-algebra A is a Banach C -algebra that is endowed with an involution.¹³ \square

According to the theorem 5.4, involution has form

$$(12.1) \quad \begin{aligned} (x^*)^{0j} &= f_{0i}^{0j} x^{0i} + f_{0i}^{1j} x^{1i} \\ (x^*)^{1j} &= f_{0i}^{1j} x^{0i} - f_{0i}^{0j} x^{1i} \end{aligned}$$

relative to the basis \bar{e}_{AR} .

Theorem 12.2.

$$(12.2) \quad \begin{aligned} \delta_k^j &= f_{0i}^{0j} f_{0k}^{0i} + f_{0i}^{1j} f_{0k}^{1i} \\ 0 &= f_{0i}^{0j} f_{0k}^{1i} - f_{0i}^{1j} f_{0k}^{0i} \end{aligned}$$

Proof. From the equation (12.1) it follows that

$$(12.3) \quad \begin{aligned} (x^{**})^{0j} &= f_{0i}^{0j} (x^*)^{0i} + f_{0i}^{1j} (x^*)^{1i} \\ &= f_{0i}^{0j} (f_{0k}^{0i} x^{0k} + f_{0k}^{1i} x^{1k}) + f_{0i}^{1j} (f_{0k}^{1i} x^{0k} - f_{0k}^{0i} x^{1k}) \\ &= f_{0i}^{0j} f_{0k}^{0i} x^{0k} + f_{0i}^{0j} f_{0k}^{1i} x^{1k} + f_{0i}^{1j} f_{0k}^{1i} x^{0k} - f_{0i}^{1j} f_{0k}^{0i} x^{1k} \\ (x^{**})^{1j} &= f_{0i}^{1j} (x^*)^{0i} - f_{0i}^{0j} (x^*)^{1i} \\ &= f_{0i}^{1j} (f_{0k}^{0i} x^{0k} + f_{0k}^{1i} x^{1k}) - f_{0i}^{0j} (f_{0k}^{1i} x^{0k} - f_{0k}^{0i} x^{1k}) \\ &= f_{0i}^{1j} f_{0k}^{0i} x^{0k} + f_{0i}^{1j} f_{0k}^{1i} x^{1k} - f_{0i}^{0j} f_{0k}^{1i} x^{0k} + f_{0i}^{0j} f_{0k}^{0i} x^{1k} \end{aligned}$$

(12.2) follows from equations (11.1), (12.3). \square

Theorem 12.3.

$$(12.4) \quad \begin{aligned} &C_{AC \cdot ij}^{k0} f_{0k}^{0l} + C_{AC \cdot ij}^{k1} f_{0k}^{1l} \\ &= f_{0j}^{0p} f_{0i}^{0q} C_{AC \cdot pq}^{l0} - f_{0j}^{1p} f_{0i}^{1q} C_{AC \cdot pq}^{l0} - f_{0j}^{0p} f_{0i}^{1q} C_{AC \cdot pq}^{l1} - f_{0j}^{1p} f_{0i}^{0q} C_{AC \cdot pq}^{l1} \\ &C_{AC \cdot ij}^{k0} f_{0k}^{1l} - C_{AC \cdot ij}^{k1} f_{0k}^{0l} \\ &= f_{0j}^{0p} f_{0i}^{0q} C_{AC \cdot pq}^{l1} - f_{0j}^{1p} f_{0i}^{1q} C_{AC \cdot pq}^{l1} + f_{0j}^{0p} f_{0i}^{1q} C_{AC \cdot pq}^{l0} + f_{0j}^{1p} f_{0i}^{0q} C_{AC \cdot pq}^{l0} \end{aligned}$$

¹³This definition is based on the definition [6]-2.2.1.

Proof. From the equation (5.11) it follows that

$$(12.5) \quad f_i^j = f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j}i$$

From equations (3.17), (12.5), (10.12), it follows that

$$(12.6) \quad \begin{aligned} (C_{AC \cdot ij}^{k0})^* f_k^l &= f_j^p f_i^q C_{AC \cdot pq}^{l0} \\ (C_{AC \cdot ij}^{k0} + C_{AC \cdot ij}^{k1}i)^* (f_{0k}^{0l} + f_{0k}^{1l}i) \\ &= (f_{0j}^{0p} + f_{0j}^{1p}i)(f_{0i}^{0q} + f_{0i}^{1q}i)(C_{AC \cdot pq}^{l0} + C_{AC \cdot pq}^{l1}i) \end{aligned}$$

From the equation (12.6) it follows that

$$(12.7) \quad \begin{aligned} &C_{AC \cdot ij}^{k0} f_{0k}^{0l} + C_{AC \cdot ij}^{k1} f_{0k}^{1l} + (C_{AC \cdot ij}^{k0} f_{0k}^{1l} - C_{AC \cdot ij}^{k1} f_{0k}^{0l})i \\ &= (f_{0j}^{0p} f_{0i}^{0q} - f_{0j}^{1p} f_{0i}^{1q} + (f_{0j}^{0p} f_{0i}^{1q} + f_{0j}^{1p} f_{0i}^{0q})i)(C_{AC \cdot pq}^{l0} + C_{AC \cdot pq}^{l1}i) \\ &= f_{0j}^{0p} f_{0i}^{0q} C_{AC \cdot pq}^{l0} - f_{0j}^{1p} f_{0i}^{1q} C_{AC \cdot pq}^{l0} - f_{0j}^{0p} f_{0i}^{1q} C_{AC \cdot pq}^{l1} - f_{0j}^{1p} f_{0i}^{0q} C_{AC \cdot pq}^{l1} \\ &\quad + (f_{0j}^{0p} f_{0i}^{0q} C_{AC \cdot pq}^{l1} - f_{0j}^{1p} f_{0i}^{1q} C_{AC \cdot pq}^{l1} + f_{0j}^{0p} f_{0i}^{1q} C_{AC \cdot pq}^{l0} + f_{0j}^{1p} f_{0i}^{0q} C_{AC \cdot pq}^{l0})i \end{aligned}$$

The equation (12.4) follows from the equation (12.7). \square

13. EXAMPLE OF INVOLUTION

Let

$$\begin{aligned} e_1^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & e_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & e_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

be basis \bar{e} of algebra of 2×2 matrices. Matrix

$$a = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

has expansion

$$a = a_1^1 e_1^1 + a_2^1 e_1^2 + a_1^2 e_2^1 + a_2^2 e_2^2$$

relative to the basis \bar{e} . Structural constants in algebra of matrices have form

$$C_{q \cdot j \cdot l}^{p \cdot i \cdot k} = \delta_l^i \delta_j^p \delta_q^k$$

The product of matrices a and b has form

$$(ab)_q^p = C_{q \cdot j \cdot l}^{p \cdot i \cdot k} a_i^j b_k^l = \delta_l^i \delta_j^p \delta_q^k a_i^j b_k^l = a_l^p b_q^l$$

If we represent the matrix a as vector

$$a = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix}$$

then we can represent the matrix of transformation f

$$a_j^i = f_{j \cdot l}^{i \cdot k} a_k^l$$

in the following form

$$f = \begin{pmatrix} f_{1 \cdot 1}^{1 \cdot 1} & f_{1 \cdot 2}^{1 \cdot 1} & f_{1 \cdot 1}^{1 \cdot 2} & f_{1 \cdot 2}^{1 \cdot 2} \\ f_{2 \cdot 1}^{1 \cdot 1} & f_{2 \cdot 2}^{1 \cdot 1} & f_{2 \cdot 1}^{1 \cdot 2} & f_{2 \cdot 2}^{1 \cdot 2} \\ f_{1 \cdot 1}^{2 \cdot 1} & f_{1 \cdot 2}^{2 \cdot 1} & f_{1 \cdot 1}^{2 \cdot 2} & f_{1 \cdot 2}^{2 \cdot 2} \\ f_{2 \cdot 1}^{2 \cdot 1} & f_{2 \cdot 2}^{2 \cdot 1} & f_{2 \cdot 1}^{2 \cdot 2} & f_{2 \cdot 2}^{2 \cdot 2} \end{pmatrix}$$

The matrix

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

corresponds to the transposition

$$a = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow a^T = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

Since we do not have analytic representation for transposition operator, then we use nonstandard format of representation.

$$\begin{aligned}
 (a^T b^T)_q^p &= C_{q \cdot j \cdot l}^{p \cdot i \cdot k} (a^T)_i^j (b^T)_k^l \\
 &= \delta_l^i \delta_j^p \delta_q^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ b_1^2 \\ b_2^2 \end{pmatrix} \\
 &= \delta_l^i \delta_j^p \delta_q^k \begin{pmatrix} j : 1 & a_1^1 \\ j : 2 & a_1^2 \\ j : 1 & a_2^1 \\ j : 2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l : 1 & b_1^1 \\ l : 2 & b_1^2 \\ l : 1 & b_2^1 \\ l : 2 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p : 1 & a_1^1 b_1^1 + a_1^2 b_2^1 \\ p : 2 & a_1^1 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 \\ p : 1 & a_2^1 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 \\ p : 2 & a_2^1 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k^1 a_1^k \\ b_k^1 a_2^k \\ b_k^2 a_1^k \\ b_k^2 a_2^k \end{pmatrix} \\
 &= ((ba)^T)_q^p
 \end{aligned}
 \tag{13.1}$$

If a_j^i are complex numbers, then involution can be represented by antilinear mapping with matrix

$$f = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

14. REFERENCES

- [1] Serge Lang, Algebra, Springer, 2002
- [2] Aleks Kleyn, Lectures on Linear Algebra over Division Ring,
eprint [arXiv:math.GM/0701238](#) (2010)
- [3] Aleks Kleyn, Quaternion Rhapsody,
eprint [arXiv:0909.0855](#) (2010)
- [4] Aleks Kleyn, Linear Mappings of Free Algebra: First Steps in Noncommu-
tative Linear Algebra,
Lambert Academic Publishing, 2010
- [5] Aleks Kleyn, Representation Theory: Representation of Universal Algebra,
Lambert Academic Publishing, 2011
- [6] William Arveson, A short course on spectral theory.
Springer - Verlag, New York, 2002
- [7] Robert Hermann, Topics in the mathematics of quantum mechanics.
Math Sci Press, 1973

15. INDEX

algebra with conjugation 16

conjugation in ring 16

C^* -algebra 23

$D\star$ -antilinear homomorphism 20

$D\star$ -antilinear mapping of ring with
conjugation 18

$D\star$ -linear homomorphism 9

matrix of antilinear homomorphism 21

matrix of linear homomorphism 10

ring with conjugation 16

scalar algebra of ring 15

scalar of element of ring 15

vector module of ring 15

vector of element of ring 15

16. SPECIAL SYMBOLS AND NOTATIONS

d^* conjugation in ring 16

$\text{Im } D$ vector module of ring D 15

$\text{Im } d$ vector of element d of ring 15

$\text{Re } D$ scalar algebra of ring D 15

$\text{Re } d$ scalar of element d of ring 15

C^* -рапсодия

Александр Клейн

Аннотация. В статье рассмотрены линейные и антилинейные отображения конечномерной алгебры над комплексным полем, а также отображение инволюции. Рассмотрен также пример C^* -алгебры.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Предисловие	1
2. Соглашения	2
3. C^* -алгебра	2
4. Линейное отображение C^* -алгебры	5
5. Антилинейное отображение C^* -алгебры	7
6. Морфизм алгебры	9
7. Линейный автоморфизм алгебры кватернионов	12
8. Кольцо с сопряжением	16
9. Линейное отображение алгебры с сопряжением	19
10. Антилинейный гомоморфизм D^* -алгебры	21
11. Инволюция банаховой D -алгебры	23
12. C^* -алгебра	24
13. Пример инволюции	25
14. Список литературы	27
15. Предметный указатель	29
16. Специальные символы и обозначения	30

1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Поскольку я изучаю математический анализ в банаховой алгебре, трудно обойти вниманием C^* -алгебру, которая является инструментом в квантовой механике. Однако, прежде чем рассмотреть конкретные результаты, мне нужно было понять структуру линейного отображения C^* -алгебры. Это послужило причиной написать эту статью.

Однако существуют различные алгебры, где определено сопряжение. Поэтому я решил не ограничивать себя полем комплексных чисел. Рассмотрение

Aleks_Kleyn@MailAPS.org.
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>.
http://arxiv.org/a/kleyn_a_1.
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>.

линейных и антилинейных отображений алгебры с сопряжением оказалось отличным от концепции, которую я рассматривал в [4]. Заманчиво найти утверждение, аналогично тому, что аддитивное отображение поля комплексных чисел можно разложить в сумму линейного и антилинейного отображений. Подобное утверждение оказалось бы мостиком между результатами в [4] и этой статьёй. Однако есть основания полагать, что в общем случае это утверждение неверно.

Это означает, что в общем случае рассмотрение сопряжения недостаточно для полной классификации линейных отображений. Однако эта классификация важна для того, чтобы понять структуру замкнутой дифференциальной формы в банаховой алгебре.

2. СОГЛАШЕНИЯ

- (1) Пусть A - свободная конечно мерная алгебра. При разложении элемента алгебры A относительно базиса \bar{e} мы пользуемся одной и той же корневой буквой для обозначения этого элемента и его координат. Однако в алгебре не принято использовать векторные обозначения. В выражении a^2 не ясно - это компонента разложения элемента a относительно базиса или это операция возведения в степень. Для облегчения чтения текста мы будем индекс элемента алгебры выделять цветом. Например,

$$a = a^i \bar{e}_i$$

- (2) Если свободная конечномерная алгебра имеет единицу, то мы будем отождествлять вектор базиса \bar{e}_0 с единицей алгебры.
- (3) Хотя алгебра является свободным модулем над некоторым кольцом, мы не пользуемся векторными обозначениями при записи элементов алгебры. В тех случаях, когда я рассматриваю матрицу координат элемента алгебры, я буду пользоваться векторными обозначениями для записи соответствующего элемента. Чтобы не возникала неоднозначность при записи сопряжения, я буду обозначать a^* элемент, сопряжённый элементу a .
- (4) Без сомнения, у читателя могут быть вопросы, замечания, возражения. Я буду признателен любому отзыву.

3. C -АЛГЕБРА

Рассматриваемое ниже построение основано на построении, выполненном в разделе [3]-5. В этой статье мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в этом разделе.

Пусть C - поле комплексных чисел. Пусть \bar{e}_C

$$(3.1) \quad \bar{e}_{C \cdot 0} = 1 \quad \bar{e}_{C \cdot 1} = i$$

базис алгебры C над полем действительных чисел R . Произведение в алгебре C определено согласно правилу

$$(3.2) \quad \bar{e}_{C \cdot 1}^2 = -\bar{e}_{C \cdot 0}$$

Согласно теореме [3]-3.1 структурные константы поля комплексных чисел C над полем действительных чисел R имеют вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} C_{C \cdot \mathbf{00}} &= 1 & C_{C \cdot \mathbf{10}} &= 1 \\ C_{C \cdot \mathbf{10}} &= 1 & C_{C \cdot \mathbf{11}} &= -1 \end{aligned}$$

Согласно определению [4]-2.2.1, C -алгебра A является C -векторным пространством. Пусть \bar{e}_{AC} - C -базис конечно мерной C -алгебры A . Произведение в C -алгебре A определено равенством

$$(3.4) \quad \bar{e}_{AC \cdot k} \bar{e}_{AC \cdot l} = C_{AC \cdot kl} \bar{e}_{AC \cdot i}$$

где $C_{AC \cdot ij}$ - структурные константы C -алгебры A над полем C .

Я буду рассматривать C -алгебру A как прямую сумму алгебр C . Каждое слагаемое суммы я отождествляю с вектором базиса \bar{e}_{AC} . Соответственно, я могу рассматривать C -алгебру A как алгебру над полем R . Пусть \bar{e}_{AR} - базис C -алгебры A над полем R . Индекс базиса \bar{e}_{AR} состоит из двух индексов: индекса слоя и индекса вектора базиса \bar{e}_C в слое.

Я буду отождествлять вектор базиса $\bar{e}_{AC \cdot i}$ с единицей в соответствующем слое. Тогда

$$(3.5) \quad \bar{e}_{AR \cdot ji} = \bar{e}_{C \cdot j} \bar{e}_{AC \cdot i}$$

Произведение векторов базиса \bar{e}_{AR} имеет вид

$$(3.6) \quad \bar{e}_{AR \cdot ji} \bar{e}_{AR \cdot mk} = \bar{e}_{C \cdot j} \bar{e}_{AC \cdot i} \bar{e}_{C \cdot m} \bar{e}_{AC \cdot k} = C_{C \cdot jm} \bar{e}_{C \cdot a} C_{AC \cdot ik} \bar{e}_{AC \cdot b}$$

$$(3.7) \quad \bar{e}_{AR \cdot 00} \bar{e}_{AR \cdot ki} = \bar{e}_{AR \cdot ki}$$

$$(3.8) \quad \bar{e}_{AR \cdot 10} \bar{e}_{AR \cdot 1i} = -\bar{e}_{AR \cdot 0i}$$

Так как $C_{AC \cdot ik} \in C$, то разложение $C_{AC \cdot ik} \in C$ относительно базиса \bar{e}_C имеет вид

$$(3.9) \quad C_{AC \cdot ik} = C_{AC \cdot ik}^{bc} \bar{e}_{C \cdot c}$$

Мы можем представить преобразование f с помощью матрицы f_{kl}^{ij}

$$(3.10) \quad a'^{ij} = f_{kl}^{ij} a^{kl}$$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} a'^{0j} &= f_{0l}^{0j} a^{0l} + f_{1l}^{0j} a^{1l} \\ a'^{1j} &= f_{0l}^{1j} a^{0l} + f_{1l}^{1j} a^{1l} \end{aligned}$$

Мы можем представить $c \in C$ в следующем виде

$$(3.12) \quad c = c^0 \bar{e}_{AR \cdot 00} + c^1 \bar{e}_{AR \cdot 10}$$

$$(3.13) \quad c^* = c^0 \bar{e}_{AR \cdot 00} - c^1 \bar{e}_{AR \cdot 10}$$

Из равенств (3.7), (3.8), (3.12), следует

$$(3.14) \quad (ca)^{0i} = c^0 a^{0i} - c^1 a^{1i}$$

$$(3.15) \quad (ca)^{1i} = c^0 a^{1i} + c^1 a^{0i}$$

Теорема 3.1. Структурные константы C -алгебры A над полем действительных чисел R имеют вид

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{AR} \cdot \overset{\text{0b}}{\text{0i} \cdot \text{0k}} = C_{AC} \cdot \overset{\text{b0}}{\text{ik}} \\ C_{AR} \cdot \overset{\text{0b}}{\text{1i} \cdot \text{1k}} = -C_{AC} \cdot \overset{\text{b0}}{\text{ik}} \\ C_{AR} \cdot \overset{\text{0b}}{\text{0i} \cdot \text{1k}} = -C_{AC} \cdot \overset{\text{b1}}{\text{ik}} \\ C_{AR} \cdot \overset{\text{0b}}{\text{1i} \cdot \text{0k}} = -C_{AC} \cdot \overset{\text{b1}}{\text{ik}} \\ C_{AR} \cdot \overset{\text{1b}}{\text{0i} \cdot \text{1k}} = C_{AC} \cdot \overset{\text{b0}}{\text{ik}} \\ C_{AR} \cdot \overset{\text{1b}}{\text{1i} \cdot \text{0k}} = C_{AC} \cdot \overset{\text{b0}}{\text{ik}} \\ C_{AR} \cdot \overset{\text{1b}}{\text{0i} \cdot \text{0k}} = C_{AC} \cdot \overset{\text{b1}}{\text{ik}} \\ C_{AR} \cdot \overset{\text{1b}}{\text{1i} \cdot \text{1k}} = -C_{AC} \cdot \overset{\text{b1}}{\text{ik}} \end{array} \right.$$

Доказательство. Согласно равенствам [3]-(5.3), [3]-(5.5), структурные константы алгебры A над полем R имеют вид

$$(3.17) \quad \begin{aligned} C_{AR} \cdot \overset{db}{\underset{j \cdot m k}{\bullet}} &= C_C \cdot \overset{a}{\underset{j m}{\bullet}} C_C \cdot \overset{d}{\underset{a c}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{bc}{\underset{i k}{\bullet}} \\ C_{AC} \cdot \overset{b}{\underset{i k}{\bullet}} &= C_{AC} \cdot \overset{bc}{\underset{i k}{\bullet}} \bar{e}_{C \cdot c} = C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{i k}{\bullet}} + C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{i k}{\bullet}} \end{aligned}$$

Из равенств (3.3), (3.17) следует

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{AR, \cdot \textcolor{red}{j} i \cdot \textcolor{red}{m} k}^{\textcolor{red}{0} b} = C_C \textcolor{red}{0}{\textcolor{red}{j} m} C_C \textcolor{red}{0}{00} C_{AC, \cdot \textcolor{red}{i} k}^{\textcolor{red}{b} 0} + C_C \textcolor{red}{1}{\textcolor{red}{j} m} C_C \textcolor{red}{0}{11} C_{AC, \cdot \textcolor{red}{i} k}^{\textcolor{red}{b} 1} \\ \quad = C_C \textcolor{red}{0}{\textcolor{red}{j} m} C_{AC, \cdot \textcolor{red}{i} k}^{\textcolor{red}{b} 0} - C_C \textcolor{red}{1}{\textcolor{red}{j} m} C_{AC, \cdot \textcolor{red}{i} k}^{\textcolor{red}{b} 1} \\ C_{AR, \cdot \textcolor{red}{j} i \cdot \textcolor{red}{m} k}^{\textcolor{red}{1} b} = C_C \textcolor{red}{1}{\textcolor{red}{j} m} C_C \textcolor{red}{1}{10} C_{AC, \cdot \textcolor{red}{i} k}^{\textcolor{red}{b} 0} + C_C \textcolor{red}{0}{\textcolor{red}{j} m} C_C \textcolor{red}{1}{01} C_{AC, \cdot \textcolor{red}{i} k}^{\textcolor{red}{b} 1} \\ \quad = C_C \textcolor{red}{1}{\textcolor{red}{j} m} C_{AC, \cdot \textcolor{red}{i} k}^{\textcolor{red}{b} 0} + C_C \textcolor{red}{0}{\textcolor{red}{j} m} C_{AC, \cdot \textcolor{red}{i} k}^{\textcolor{red}{b} 1} \end{array} \right.$$

Из равенств (3.3), (3.18) следует

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{AR} \cdot \overset{0b}{\underset{0i \cdot 0k}{\bullet}} = C_C \cdot \overset{0}{\underset{00}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{ik}{\bullet}} - C_C \cdot \overset{1}{\underset{00}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{ik}{\bullet}} \\ C_{AR} \cdot \overset{0b}{\underset{1i \cdot 1k}{\bullet}} = C_C \cdot \overset{0}{\underset{11}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{ik}{\bullet}} - C_C \cdot \overset{1}{\underset{11}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{ik}{\bullet}} \\ C_{AR} \cdot \overset{0b}{\underset{0i \cdot 1k}{\bullet}} = C_C \cdot \overset{0}{\underset{01}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{ik}{\bullet}} - C_C \cdot \overset{1}{\underset{01}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{ik}{\bullet}} \\ C_{AR} \cdot \overset{0b}{\underset{1i \cdot 0k}{\bullet}} = C_C \cdot \overset{0}{\underset{10}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{ik}{\bullet}} - C_C \cdot \overset{1}{\underset{10}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{ik}{\bullet}} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{\underset{0i \cdot 1k}{\bullet}} = C_C \cdot \overset{1}{\underset{01}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{ik}{\bullet}} + C_C \cdot \overset{0}{\underset{01}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{ik}{\bullet}} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{\underset{1i \cdot 0k}{\bullet}} = C_C \cdot \overset{1}{\underset{10}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{ik}{\bullet}} + C_C \cdot \overset{0}{\underset{10}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{ik}{\bullet}} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{\underset{0i \cdot 0k}{\bullet}} = C_C \cdot \overset{1}{\underset{00}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{ik}{\bullet}} + C_C \cdot \overset{0}{\underset{00}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{ik}{\bullet}} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{\underset{1i \cdot 1k}{\bullet}} = C_C \cdot \overset{1}{\underset{11}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{ik}{\bullet}} + C_C \cdot \overset{0}{\underset{11}{\bullet}} C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{ik}{\bullet}} \end{array} \right.$$

(3.16) следует из равенств (3.3), (3.19).

1

Из равенства (3.16) следует, что

$$(3.20) \quad \begin{cases} C_{AR} \cdot \overset{0b}{\underset{0i \cdot 0k}{\cdot}} = -C_{AR} \cdot \overset{0b}{\underset{1i \cdot 1k}{\cdot}} = C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{ik}{\cdot}} \\ C_{AR} \cdot \overset{0b}{\underset{0i \cdot 1k}{\cdot}} = C_{AR} \cdot \overset{0b}{\underset{1i \cdot 0k}{\cdot}} = -C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{ik}{\cdot}} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{\underset{0i \cdot 1k}{\cdot}} = C_{AR} \cdot \overset{1b}{\underset{1i \cdot 0k}{\cdot}} = C_{AC} \cdot \overset{b0}{\underset{ik}{\cdot}} \\ C_{AR} \cdot \overset{1b}{\underset{0i \cdot 0k}{\cdot}} = -C_{AR} \cdot \overset{1b}{\underset{1i \cdot 1k}{\cdot}} = C_{AC} \cdot \overset{b1}{\underset{ik}{\cdot}} \end{cases}$$

4. ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ C-АЛГЕБРЫ

Определение 4.1. Отображение C-векторных пространств

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

называется C-линейным, если

$$(4.1) \quad f(ca) = cf(a) \quad c \in C \quad a \in A$$

□

Теорема 4.2 (Уравнения Коши-Римана). Матрица линейного отображения C-векторных пространств

$$f : A_1 \rightarrow A_2 \\ y^{ik} = f_{jm}^{ik} x^{jm}$$

удовлетворяет соотношению

$$(4.2) \quad \begin{aligned} f \cdot \overset{0j}{\underset{0i}{\cdot}} &= f \cdot \overset{1j}{\underset{1i}{\cdot}} \\ f \cdot \overset{1j}{\underset{0i}{\cdot}} &= -f \cdot \overset{0j}{\underset{1i}{\cdot}} \end{aligned}$$

Доказательство. Из равенств (3.11), (3.14), (3.15) следует

$$(4.3) \quad \begin{aligned} (f(ca))^{0j} &= f_{0i}^{0j}(ca)^{0i} + f_{1i}^{0j}(ca)^{1i} \\ &= f_{0i}^{0j}(c^0 a^{0i} - c^1 a^{1i}) + f_{1i}^{0j}(c^0 a^{1i} + c^1 a^{0i}) \\ &= f_{0i}^{0j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{0j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^1 a^{0i} \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} (f(ca))^{1j} &= f_{0i}^{1j}(ca)^{0i} + f_{1i}^{1j}(ca)^{1i} \\ &= f_{0i}^{1j}(c^0 a^{0i} - c^1 a^{1i}) + f_{1i}^{1j}(c^0 a^{1i} + c^1 a^{0i}) \\ &= f_{0i}^{1j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{1j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^1 a^{0i} \end{aligned}$$

Из равенств (4.1), (3.11), (3.12), (3.14), (3.15) следует

$$(4.5) \quad \begin{aligned} (cf(a))^{0j} &= c^0(f(a))^{0j} - c^1(f(a))^{1j} \\ &= c^0(f_{0i}^{0j} a^{0i} + f_{1i}^{0j} a^{1i}) - c^1(f_{0i}^{1j} a^{0i} + f_{1i}^{1j} a^{1i}) \\ &= c^0 f_{0i}^{0j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{0j} a^{1i} - c^1 f_{0i}^{1j} a^{0i} - c^1 f_{1i}^{1j} a^{1i} \end{aligned}$$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} (cf(a))^{1j} &= c^0(f(a))^{1j} + c^1(f(a))^{0j} \\ &= c^0(f_{0i}^{1j} a^{0i} + f_{1i}^{1j} a^{1i}) + c^1(f_{0i}^{0j} a^{0i} + f_{1i}^{0j} a^{1i}) \\ &= c^0 f_{0i}^{1j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{1j} a^{1i} + c^1 f_{0i}^{0j} a^{0i} + c^1 f_{1i}^{0j} a^{1i} \end{aligned}$$

Из равенств (4.1), (4.3), (4.5) следует

$$(4.7) \quad \begin{aligned} & f_{0i}^{0j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{0j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^1 a^{0i} \\ &= c^0 f_{0i}^{0j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{0j} a^{1i} - c^1 f_{0i}^{1j} a^{0i} - c^1 f_{1i}^{1j} a^{1i} \end{aligned}$$

Из равенств (4.1), (4.4), (4.6) следует

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & f_{0i}^{1j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{1j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^1 a^{0i} \\ &= c^0 f_{0i}^{1j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{1j} a^{1i} + c^1 f_{0i}^{0j} a^{0i} + c^1 f_{1i}^{0j} a^{1i} \end{aligned}$$

Так как c^k, a^{ki} произвольны, то равенство (4.2) следует из равенств (4.7), (4.8). \square

Теорема 4.3. Пусть \bar{e}_{iC} - C -базис C -векторного пространства A_i , $i = 1, 2$. Пусть \bar{e}_{iR} - соответствующий R -базис C -векторного пространства A_i . Матрица линейного отображения

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

имеет вид

$$(4.9) \quad \begin{aligned} x_2^{0j} &= f_{0i}^{0j} x_1^{0i} - f_{0i}^{1j} x_1^{1i} \\ x_2^{1j} &= f_{0i}^{1j} x_1^{0i} + f_{0i}^{0j} x_1^{1i} \end{aligned}$$

относительно базисов $\bar{e}_{1R}, \bar{e}_{2R}$ и имеет вид

$$(4.10) \quad x_2^j = f_i^j x_1^i \quad f_i^j = f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j} i$$

относительно базисов $\bar{e}_{1C}, \bar{e}_{2C}$

Доказательство. Так как отображение f является R -линейным отображением, то относительно базисов $\bar{e}_{1R}, \bar{e}_{2R}$ отображение f имеет вид

$$(4.11) \quad \begin{aligned} x_2^{0j} &= f_{0i}^{0j} x_1^{0i} + f_{1i}^{0j} x_1^{1i} \\ x_2^{1j} &= f_{0i}^{1j} x_1^{0i} + f_{1i}^{1j} x_1^{1i} \end{aligned}$$

Равенство (4.9) следует из равенств (4.2), (4.11). Равенство (4.10) следует из равенства (4.9) и сравнения равенств

$$\begin{aligned} (f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j} i)(x_1^{0i} + x_1^{1i} i) &= f_{0i}^{0j} x_1^{0i} - f_{0i}^{1j} x_1^{1i} + (f_{0i}^{1j} x_1^{0i} + f_{0i}^{0j} x_1^{1i})i \\ \begin{pmatrix} f_{0i}^{0j} & -f_{0i}^{1j} \\ f_{0i}^{1j} & f_{0i}^{0j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{0i} \\ x_1^{1i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_{0i}^{0j} x_1^{0i} - f_{0i}^{1j} x_1^{1i} \\ f_{0i}^{1j} x_1^{0i} + f_{0i}^{0j} x_1^{1i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\square

Теорема 4.2 описывает структуру C -линейного отображения C -алгебры A . Однако существуют R -линейные отображения C -алгебры A , не являющиеся C -линейными.

5. АНТИЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ C-АЛГЕБРЫ

Определение 5.1. Морфизм C -векторных пространств

$$(5.1) \quad I : z \in C \rightarrow z^* \in C \quad f : A_1 \rightarrow A_2$$

называется антилинейным отображением.¹

□

Теорема 5.2. Пусть отображение C -векторных пространств

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

является антилинейным отображением. Тогда

$$(5.2) \quad f(ca) = c^* f(a) \quad c \in C \quad a \in A$$

Доказательство. Согласно построениям, выполненным в разделе [4]-1.5, отображение I является морфизмом R -алгебры C . Равенство (5.2) является следствием определения [5]-2.2.2, и равенства [5]-(2.2.4). □

Если $c \in R$, то

$$f(ca) = cf(a)$$

так как $c = c^*$. Следовательно, антилинейное отображение C -алгебры A является R -линейным отображением.

Теорема 5.3 (Уравнения Коши-Римана). Матрица антилинейного отображения C -векторных пространств

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

$$y^{ik} = f_{jm}^{ik} x^{jm}$$

удовлетворяет соотношению

$$(5.3) \quad \begin{aligned} f_{0i}^{0j} &= -f_{1i}^{1j} \\ f_{1i}^{0j} &= f_{0i}^{1j} \end{aligned}$$

Доказательство. Из равенств (3.11), (3.14), (3.15) следует

$$(5.4) \quad \begin{aligned} (f(ca))^{0j} &= f_{0i}^{0j}(ca)^{0i} + f_{1i}^{0j}(ca)^{1i} \\ &= f_{0i}^{0j}(c^0 a^{0i} - c^1 a^{1i}) + f_{1i}^{0j}(c^0 a^{1i} + c^1 a^{0i}) \\ &= f_{0i}^{0j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{0j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^1 a^{0i} \end{aligned}$$

$$(5.5) \quad \begin{aligned} (f(ca))^{1j} &= f_{0i}^{1j}(ca)^{0i} + f_{1i}^{1j}(ca)^{1i} \\ &= f_{0i}^{1j}(c^0 a^{0i} - c^1 a^{1i}) + f_{1i}^{1j}(c^0 a^{1i} + c^1 a^{0i}) \\ &= f_{0i}^{1j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{1j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^1 a^{0i} \end{aligned}$$

¹Аналогичное определение дано в [7], с. 234.

Из равенств (5.2), (3.11), (3.13), (3.14), (3.15) следует

$$\begin{aligned}
 (c^* f(a))^{0j} &= c^0(f(a))^{0j} + c^1(f(a))^{1j} \\
 (5.6) \quad &= c^0(f_{0i}^{0j} a^{0i} + f_{1i}^{0j} a^{1i}) + c^1(f_{0i}^{1j} a^{0i} + f_{1i}^{1j} a^{1i}) \\
 &= c^0 f_{0i}^{0j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{0j} a^{1i} + c^1 f_{0i}^{1j} a^{0i} + c^1 f_{1i}^{1j} a^{1i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c^* f(a))^{1j} &= c^0(f(a))^{1j} - c^1(f(a))^{0j} \\
 (5.7) \quad &= c^0(f_{0i}^{1j} a^{0i} + f_{1i}^{1j} a^{1i}) - c^1(f_{0i}^{0j} a^{0i} + f_{1i}^{0j} a^{1i}) \\
 &= c^0 f_{0i}^{1j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{1j} a^{1i} - c^1 f_{0i}^{0j} a^{0i} - c^1 f_{1i}^{0j} a^{1i}
 \end{aligned}$$

Из равенств (5.2), (5.4), (5.6) следует

$$\begin{aligned}
 (5.8) \quad &f_{0i}^{0j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{0j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{0j} c^1 a^{0i} \\
 &= c^0 f_{0i}^{0j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{0j} a^{1i} + c^1 f_{0i}^{1j} a^{0i} + c^1 f_{1i}^{1j} a^{1i}
 \end{aligned}$$

Из равенств (5.2), (5.5), (5.7) следует

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad &f_{0i}^{1j} c^0 a^{0i} - f_{0i}^{1j} c^1 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^0 a^{1i} + f_{1i}^{1j} c^1 a^{0i} \\
 &= c^0 f_{0i}^{1j} a^{0i} + c^0 f_{1i}^{1j} a^{1i} - c^1 f_{0i}^{0j} a^{0i} - c^1 f_{1i}^{0j} a^{1i}
 \end{aligned}$$

Так как c^k, a^{ki} произвольны, то равенство (5.3) следует из равенств (5.8), (5.9). \square

Теорема 5.4. Пусть \bar{e}_{iC} - C -базис C -векторного пространства A_i , $i = 1, 2$. Пусть \bar{e}_{iR} - соответствующий R -базис C -векторного пространства A_i . Матрица антимлинейного отображения

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

имеет вид

$$\begin{aligned}
 (5.10) \quad &x_2^{0j} = f_{0i}^{0j} x_1^{0i} + f_{0i}^{1j} x_1^{1i} \\
 &x_2^{1j} = f_{0i}^{1j} x_1^{0i} - f_{0i}^{0j} x_1^{1i}
 \end{aligned}$$

относительно базисов $\bar{e}_{1R}, \bar{e}_{2R}$ и имеет вид

$$(5.11) \quad x_2^j = f_i^j I \circ x_1^i \quad I \circ z = z^* \quad f_i^j = f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j} i$$

относительно базисов $\bar{e}_{1C}, \bar{e}_{2C}$

Доказательство. Так как отображение f является R -линейным отображением, то относительно базисов $\bar{e}_{1R}, \bar{e}_{2R}$ отображение f имеет вид

$$\begin{aligned}
 (5.12) \quad &x_2^{0j} = f_{0i}^{0j} x_1^{0i} + f_{1i}^{0j} x_1^{1i} \\
 &x_2^{1j} = f_{0i}^{1j} x_1^{0i} + f_{1i}^{1j} x_1^{1i}
 \end{aligned}$$

Равенство (5.10) следует из равенств (5.3), (5.12). Равенство (5.11) следует из равенства (5.10) и сравнения равенств

$$\begin{aligned}
 (f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j} i) I \circ (x_1^{0i} + x_1^{1i} i) &= (f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j} i)(x_1^{0i} - x_1^{1i} i) \\
 &= f_{0i}^{0j} x_1^{0i} + f_{0i}^{1j} x_1^{1i} + (f_{0i}^{1j} x_1^{0i} - f_{0i}^{0j} x_1^{1i}) i
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} f_{0i}^{0j} & f_{0i}^{1j} \\ f_{0i}^{1j} & -f_{0i}^{0j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{0i} \\ x_1^{1i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{0i}^{0j} x_1^{0i} + f_{0i}^{1j} x_1^{1i} \\ f_{0i}^{1j} x_1^{0i} - f_{0i}^{0j} x_1^{1i} \end{pmatrix}$$

□

6. МОРФИЗМ АЛГЕБРЫ

В этом разделе мы рассмотрим алгебру A над кольцом D . Согласно построениям, выполненным в разделах [5]-4.4.2, [5]-4.4.3, диаграмма представлений D -алгебры имеет вид

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f_{1,2}} & A \xrightarrow{f_{2,3}} A \\ & & \uparrow f_{1,2} \\ & & D \end{array} \quad \begin{array}{l} f_{1,2}(d) : \bar{v} \rightarrow d\bar{v} \\ f_{2,3}(\bar{v}) : \bar{w} \rightarrow \bar{C}(\bar{v}, \bar{w}) \\ \bar{C} \in \mathcal{L}(A^2; A) \end{array}$$

На диаграмме представлений (6.1), D - кольцо, A - абелева группа. Мы сперва рассматриваем вертикальное представление, а затем горизонтальные. Мы полагаем, что A - свободный $D\star$ -модуль ([1], с. 103). Следовательно, векторы базиса \bar{e} $D\star$ -модуля A линейно независимы. Билинейное отображение

$$\bar{C} : A \times A \rightarrow A$$

имеет следующее разложение относительно базиса \bar{e}

$$(6.2) \quad \bar{C}(\bar{v}, \bar{w}) = C_{ij}^{k} v^i w^j \bar{e}_k$$

Согласно теореме [5]-4.4.1, билинейное отображение \bar{C} порождает произведение в $D\star$ -алгебре A

$$(6.3) \quad \bar{C}(\bar{v}, \bar{w}) = \bar{v}\bar{w}$$

и координаты билинейного отображения \bar{C} относительно базиса \bar{e} являются структурными константами этого произведения.

Теорема 6.1. Пусть

$$(6.4) \quad \begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{f_{1,1,2}} & A_1 \xrightarrow{f_{1,2,3}} A_1 \\ & & \uparrow f_{1,1,2} \\ & & D_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} f_{1,1,2}(d) : \bar{v} \rightarrow d\bar{v} \\ f_{1,2,3}(\bar{v}) : \bar{w} \rightarrow \bar{C}_1(\bar{v}, \bar{w}) \\ \bar{C}_1 \in \mathcal{L}(A_1^2; A_1) \end{array}$$

диаграмма представлений, описывающая $D_1\star$ -алгебру A_1 . Пусть

$$(6.5) \quad \begin{array}{ccc} D_2 & \xrightarrow{f_{2,1,2}} & A_2 \xrightarrow{f_{2,2,3}} A_2 \\ & & \uparrow f_{2,1,2} \\ & & D_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} f_{2,1,2}(d) : \bar{v} \rightarrow d\bar{v} \\ f_{2,2,3}(\bar{v}) : \bar{w} \rightarrow \bar{C}_2(\bar{v}, \bar{w}) \\ \bar{C}_2 \in \mathcal{L}(A_2^2; A_2) \end{array}$$

диаграмма представлений, описывающая $D_2\star$ -алгебру A_2 . Морфизм² $D_1\star$ -алгебры A_1 в $D_2\star$ -алгебру A_2

$$r_1 : D_1 \rightarrow D_2 \quad \bar{r}_2 : A_1 \rightarrow A_2$$

является $D\star$ -линейным отображением $D_1\star$ -алгебры A_1 в $D_2\star$ -алгебру A_2 таким, что

$$(6.6) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{r}_2(\bar{a})\bar{r}_2(\bar{b})$$

Доказательство. Согласно равенству [5]-(4.2.3), морфизм (r_1, \bar{r}_2) представления $f_{1,2}$ удовлетворяет равенству

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \bar{r}_2(f_{1,2}(d)(\bar{a})) &= f_{2,1,2}(r_1(d))(\bar{r}_2(\bar{a})) \\ \bar{r}_2(d\bar{a}) &= r_1(d)\bar{r}_2(\bar{a}) \end{aligned}$$

Следовательно, отображение (r_1, \bar{r}_2) является $D\star$ -линейным отображением.

Согласно равенству [5]-(4.2.3), морфизм (\bar{r}_2, \bar{r}_2) представления $f_{2,3}$ удовлетворяет равенству³

$$(6.8) \quad \bar{r}_2(f_{1,2,3}(\bar{a}_2)(\bar{a}_3)) = f_{2,2,3}(\bar{r}_2(\bar{a}_2))(\bar{r}_2(\bar{a}_3))$$

Из равенств (6.8), (6.4), (6.5), следует

$$(6.9) \quad \bar{r}_2(\bar{C}_1(\bar{v}, \bar{w})) = \bar{C}_2(\bar{r}_2(\bar{v}), \bar{r}_2(\bar{w}))$$

Равенство (6.6) следует из равенств (6.9), (6.3). \square

Определение 6.2. Морфизм представлений $D_1\star$ -алгебры A_1 в $D_2\star$ -алгебру A_2 называется $D\star$ -линейным гомоморфизмом $D_1\star$ -алгебры A_1 в $D_2\star$ -алгебру A_2 . \square

Теорема 6.3. Пусть \bar{e}_1 - базис $D_1\star$ -алгебры A_1 . Пусть \bar{e}_2 - базис $D_2\star$ -алгебры A_2 . Тогда линейный гомоморфизм⁴ (r_1, \bar{r}_2) $D_1\star$ -алгебры A_1 в $D_2\star$ -алгебру A_2 имеет представление

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \bar{b} &= r_1(a)^* * r_2^* * \bar{e}_2 = r_1(a^j) r_2^i \bar{e}_{2,i} \\ b &= r_1(a)^* * r_2 \end{aligned}$$

относительно заданных базисов. Здесь

- a - координатная матрица вектора \bar{a} относительно базиса \bar{e}_1 .
- b - координатная матрица вектора

$$\bar{b} = \bar{r}_2(\bar{a})$$

относительно базиса \bar{e}_2 .

²В замечании [2]-4.4.5, я показал, что выбор отображения r_1 при изучении линейных отображений может быть ограничен отображением

$$r_1 : D \rightarrow D \quad r_1(d) = d$$

Однако в разделе 10 я рассматриваю антилинейные отображения алгебры. Поэтому я записал теоремы в этом разделе таким образом, чтобы их можно было сопоставить с теоремами в разделе 10.

³Так как в диаграммах представлений (6.4), (6.5), носители Ω_2 -алгебры и Ω_3 -алгебры совпадают, то также совпадают морфизмы представлений на уровнях 2 и 3.

⁴Эта теорема аналогична теореме [2]-4.4.3.

- r_2 - координатная матрица множества векторов $(\bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i}))$ относительно базиса \bar{e}_2 . Мы будем называть матрицу r_2 **матрицей линейного гомоморфизма** относительно базисов \bar{e}_1 и \bar{e}_2 .

Доказательство. Вектор $\bar{a} \in A_1$ имеет разложение

$$\bar{a} = a^* \bar{e}_1$$

относительно базиса \bar{e}_1 . Вектор $\bar{b} \in A_2$ имеет разложение

$$(6.11) \quad \bar{b} = b^* \bar{e}_2$$

относительно базиса \bar{e}_2 .

Так как (r_1, \bar{r}_2) - линейный гомоморфизм, то на основании (6.7) следует, что

$$(6.12) \quad \bar{b} = \bar{r}_2(\bar{a}) = \bar{r}_2(a^* \bar{e}_1) = r_1(a)^* \bar{r}_2(\bar{e}_1)$$

где

$$r_1(a) = \begin{pmatrix} r_1(a^1) \\ \dots \\ r_1(a^n) \end{pmatrix}$$

$\bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i})$ также вектор $D\star$ -модуля A_2 и имеет разложение

$$(6.13) \quad \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i}) = r_{2 \cdot i}^* \bar{e}_2 = r_{2 \cdot i}^j \bar{e}_j$$

относительно базиса \bar{e}_2 . Комбинируя (6.12) и (6.13), мы получаем

$$(6.14) \quad \bar{b} = r_1(a)^* r_{2 \cdot i}^* \bar{e}_2$$

(6.10) следует из сравнения (6.11) и (6.14) и теоремы [2]-4.3.3. \square

Теорема 6.4. Пусть \bar{e}_1 - базис $D_1\star$ -алгебры A_1 . Пусть \bar{e}_2 - базис $D_2\star$ -алгебры A_2 . Если отображение r_1 является инъекцией, то матрица линейного гомоморфизма и структурные константы связаны соотношением

$$(6.15) \quad r_1(C_{1 \cdot ij}^k) r_{2 \cdot k}^l = r_{2 \cdot i}^p r_{2 \cdot j}^q C_{2 \cdot pq}^l$$

Доказательство. Пусть

$$\bar{a}, \bar{b} \in A_1 \quad \bar{a} = a^* \bar{e}_1 \quad \bar{b} = b^* \bar{e}_1$$

Из равенств (6.2), (6.3), (6.4), следует

$$(6.16) \quad \bar{a}\bar{b} = a^i b^j C_{1 \cdot ij}^k \bar{e}_{1 \cdot k}$$

Из равенств (6.7), (6.16), следует

$$(6.17) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = r_1(C_{1 \cdot ij}^k a^i b^j) \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot k})$$

Поскольку отображение r_1 является гомоморфизмом колец, то из равенства (6.17), следует

$$(6.18) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = r_1(C_{1 \cdot ij}^k) r_1(a^i) r_1(b^j) \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot k})$$

Из теоремы 6.3 и равенства (6.18), следует

$$(6.19) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = r_1(C_{1 \cdot ij}^k) r_1(a^i) r_1(b^j) r_{2 \cdot k}^l \bar{e}_{2 \cdot l}$$

Из равенства (6.6) и теоремы 6.3, следует

$$(6.20) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{r}_2(\bar{a}) \bar{r}_2(\bar{b}) = r_1(a^i) r_{2 \cdot i}^p \bar{e}_{2 \cdot p} r_1(b^j) r_{2 \cdot j}^q \bar{e}_{2 \cdot q}$$

Из равенств (6.2), (6.3), (6.5), (6.20), следует

$$(6.21) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = r_1(a^i)r_{2,i}^p r_1(b^j)r_{2,j}^q C_{2,pq}^l \bar{e}_{2,l}$$

Из равенств (6.19), (6.21), следует

$$(6.22) \quad r_1(C_{1,ij}^k)r_1(a^i)r_1(b^j)r_{2,k}^l \bar{e}_{2,l} = r_1(a^i)r_{2,i}^p r_1(b^j)r_{2,j}^q C_{2,pq}^l \bar{e}_{2,l}$$

Равенство (6.15) следует из равенства (6.22), так как векторы базиса \bar{e}_2 линейно независимы, и a^i, b^i (а следовательно, $r_1(a^i), r_1(b^i)$) - произвольные величины. \square

7. ЛИНЕЙНЫЙ АВТОМОРФИЗМ АЛГЕБРЫ КВАТЕРНИОНОВ

Определение координат линейного автоморфизма - задача непростая. В этом разделе мы рассмотрим пример нетривиального линейного автоморфизма алгебры кватернионов.

Теорема 7.1. Координаты линейного автоморфизма алгебры кватернионов удовлетворяют системе уравнений

$$(7.1) \quad \begin{cases} r_1^1 = r_2^2 r_3^3 - r_3^2 r_1^2 & r_2^1 = r_3^2 r_1^3 - r_3^3 r_1^2 & r_3^1 = r_1^2 r_2^3 - r_1^3 r_2^2 \\ r_1^2 = r_2^3 r_1^3 - r_2^2 r_1^3 & r_2^2 = r_3^3 r_1^1 - r_3^1 r_1^3 & r_3^2 = r_1^3 r_2^1 - r_1^1 r_2^3 \\ r_1^3 = r_2^1 r_2^2 - r_2^2 r_1^3 & r_2^3 = r_1^3 r_1^2 - r_3^2 r_1^1 & r_3^3 = r_1^1 r_2^2 - r_1^2 r_2^1 \end{cases}$$

Доказательство. Согласно теоремам [4]-3.3.1, 6.4, линейный автоморфизм алгебры кватернионов удовлетворяет уравнениям

$$(7.2) \quad \begin{aligned} r_0^l &= r_0^p r_0^q C_{pq}^l & r_1^l &= r_0^p r_1^q C_{pq}^l & r_2^l &= r_0^p r_2^q C_{pq}^l & r_3^l &= r_0^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_1^l &= r_1^p r_0^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_1^p r_1^q C_{pq}^l & r_3^l &= r_1^p r_2^q C_{pq}^l & -r_2^l &= r_1^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_2^l &= r_2^p r_0^q C_{pq}^l & -r_3^l &= r_2^p r_1^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_2^p r_2^q C_{pq}^l & r_0^l &= r_2^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_3^l &= r_3^p r_0^q C_{pq}^l & r_2^l &= r_3^p r_1^q C_{pq}^l & -r_1^l &= r_3^p r_2^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_3^p r_3^q C_{pq}^l \end{aligned}$$

Из равенства (7.2) следует

$$(7.3) \quad \begin{aligned} r_1^l &= r_0^p r_1^q C_{pq}^l = r_2^p r_3^q C_{pq}^l & r_0^p r_1^q C_{pq}^l &= r_0^p r_1^q C_{qp}^l & r_2^p r_3^q C_{pq}^l &= -r_2^p r_3^q C_{qp}^l \\ r_2^l &= r_0^p r_2^q C_{pq}^l = r_3^p r_1^q C_{pq}^l & r_0^p r_2^q C_{pq}^l &= r_0^p r_2^q C_{qp}^l & r_3^p r_1^q C_{pq}^l &= -r_3^p r_1^q C_{qp}^l \\ r_3^l &= r_0^p r_3^q C_{pq}^l = r_1^p r_2^q C_{pq}^l & r_0^p r_3^q C_{pq}^l &= r_0^p r_3^q C_{qp}^l & r_1^p r_2^q C_{pq}^l &= -r_1^p r_2^q C_{qp}^l \end{aligned}$$

$$(7.4) \quad r_0^l = r_0^p r_0^q C_{pq}^l = -r_1^p r_1^q C_{pq}^l = -r_2^p r_2^q C_{pq}^l = -r_3^p r_3^q C_{pq}^l$$

Если $l = 0$, то из равенства

$$C_{pq}^0 = C_{qp}^0$$

следует

$$(7.5) \quad r_i^p r_j^q C_{pq}^0 = r_i^p r_j^q C_{qp}^0$$

Из равенства (7.3) для $l = 0$ и равенства (7.5), следует

$$(7.6) \quad r_1^0 = r_2^0 = r_3^0 = 0$$

Если $l = 1, 2, 3$, то равенство (7.3) можно записать в виде

$$(7.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^l r_i^0 C_{l0}^l + r_0^0 r_i^l C_{0l}^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ba}^l \\ \quad r_0^l r_i^0 C_{l0}^l + r_0^0 r_i^l C_{0l}^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ba}^l \\ = r_0^l r_i^0 C_{0l}^l + r_0^0 r_i^l C_{l0}^l + r_0^a r_i^b C_{ba}^l + r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^0 r_j^l C_{0l}^l + r_k^l r_j^0 C_{l0}^l + r_k^a r_j^b C_{ab}^l + r_k^b r_j^a C_{ba}^l \\ \quad r_k^0 r_j^l C_{0l}^l + r_k^l r_j^0 C_{l0}^l + r_k^a r_j^b C_{ab}^l + r_k^b r_j^a C_{ba}^l \\ = -r_k^0 r_j^l C_{l0}^l - r_k^l r_j^0 C_{0l}^l - r_k^a r_j^b C_{ba}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ \quad i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ \quad i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

Из равенств (7.7), (7.6) и равенств

$$(7.8) \quad \begin{aligned} C_{0l}^l &= C_{l0}^l = 1 \\ C_{ab}^l &= -C_{ba}^l \end{aligned}$$

следует

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^0 r_i^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l - r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad r_0^0 r_i^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l - r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ = r_0^0 r_i^l - r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ \quad i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ \quad i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

Из равенств (7.9) следует

$$(7.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^0 r_i^l \\ r_0^a r_i^b - r_0^b r_i^a = 0 \\ i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

Из равенства (7.10) следует

$$(7.11) \quad r_0^0 = 1$$

Из равенства (7.4) для $l = 0$ следует

$$(7.12) \quad \begin{aligned} r_0^0 &= r_0^0 r_0^0 - r_0^1 r_0^1 - r_0^2 r_0^2 - r_0^3 r_0^3 \\ &= -r_i^0 r_i^0 + r_i^1 r_i^1 + r_i^2 r_i^2 + r_i^3 r_i^3 \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Из равенств (7.6), (7.10), (7.12), следует

$$(7.13) \quad \begin{aligned} 0 &= r_0^1 r_0^1 + r_0^2 r_0^2 + r_0^3 r_0^3 \\ 1 &= r_i^1 r_i^1 + r_i^2 r_i^2 + r_i^3 r_i^3 \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Из равенств (7.13) следует⁵

$$(7.14) \quad r_0^1 = r_0^2 = r_0^3 = 0$$

Из равенства (7.4) для $l > 0$ следует

$$(7.15) \quad \begin{aligned} r_0^l &= r_0^l r_0^0 C_{l0}^l + r_0^0 r_0^l C_{0l}^l + r_0^a r_0^b C_{ab}^l + r_0^b r_0^a C_{ba}^l \\ &= -r_i^l r_i^0 C_{l0}^l - r_i^0 r_i^l C_{0l}^l - r_i^a r_i^b C_{ab}^l - r_i^b r_i^a C_{ba}^l \\ i &> 0 \\ l &> 0 \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{aligned}$$

⁵Мы здесь опираемся на то, что алгебра кватернионов определена над полем действительных чисел. Если рассматривать алгебру кватернионов над полем комплексных чисел, то уравнение (7.13) определяет конус в комплексном пространстве. Соответственно, у нас шире выбор координат линейного автоморфизма.

Равенства (7.15) тождественно верны в силу равенств (7.6), (7.14), (7.8). Из равенств (7.14), (7.10), следует

$$(7.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ l > 0 \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

Равенства (7.1) следуют из равенств (7.16). \square

Пример 7.2. Очевидно, координаты

$$r_j^i = \delta_j^i$$

удовлетворяют уравнению (7.1). Мы можем убедиться непосредственной проверкой, что координаты отображения

$$r_0^0 = 1 \quad r_2^1 = 1 \quad r_3^2 = 1 \quad r_1^3 = 1$$

также удовлетворяют уравнению (7.1). Матрица координат этого отображения имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Согласно теореме [4]-3.3.4, стандартные компоненты отображения r имеют вид

$$\begin{array}{llll} r^{00} = \frac{1}{4} & r^{11} = -\frac{1}{4} & r^{22} = -\frac{1}{4} & r^{33} = -\frac{1}{4} \\ r^{10} = -\frac{1}{4} & r^{01} = \frac{1}{4} & r^{32} = -\frac{1}{4} & r^{23} = -\frac{1}{4} \\ r^{20} = -\frac{1}{4} & r^{31} = -\frac{1}{4} & r^{02} = \frac{1}{4} & r^{13} = -\frac{1}{4} \\ r^{30} = -\frac{1}{4} & r^{21} = -\frac{1}{4} & r^{12} = -\frac{1}{4} & r^{03} = \frac{1}{4} \end{array}$$

Следовательно, отображение r имеет вид

$$r(a) = a^0 + a^2 i + a^3 j + a^1 k$$

$$\begin{aligned} r(a) = \frac{1}{4}(a - iai - jaj - kak - ia + ai - kaj - jak \\ - ja - kai + aj - iak - ka - jai - iaj + ak) \end{aligned}$$

\square

8. КОЛЬЦО С СОПРЯЖЕНИЕМ

Пусть существует коммутативное подкольцо F кольца D такое, что $F \neq D$ и кольцо D является свободным конечно мерным модулем над кольцом F . Пусть \bar{e} - базис свободного модуля D над кольцом F . Мы будем полагать $\bar{e}_0 = 1$.

Теорема 8.1. *Кольцо D является F -алгеброй.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$(8.1) \quad f : D \times D \rightarrow D \quad a, b \in D \rightarrow ab \in D$$

Поскольку произведение дистрибутивно по отношению к сложению, то

$$(8.2) \quad \begin{aligned} f(a_1 + a_2, b) &= (a_1 + a_2)b = a_1b + a_2b = f(a_1, b) + f(a_2, b) \\ f(a, b_1 + b_2) &= a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2 = f(a, b_1) + f(a, b_2) \end{aligned}$$

Если $a \in F$, то

$$(8.3) \quad \begin{aligned} f(ab, c) &= (ab)c = a(bc) = af(b, c) \\ f(b, ac) &= b(ac) = (ba)c = (ab)c = a(bc) = af(b, c) \end{aligned}$$

Из равенств (8.2), (8.3), следует, что отображение f является билинейным отображением над кольцом F . Согласно определению [4]-2.2.1, кольцо D является F -алгеброй. \square

Следствие 8.2. *Кольцо F является подалгеброй F -алгебры D .* \square

Рассмотрим отображения

$$\text{Re} : D \rightarrow D$$

$$\text{Im} : D \rightarrow D$$

определенные равенством

$$(8.4) \quad \text{Re } d = d^0 \quad \text{Im } d = d - d^0 \quad d \in D \quad d = d^i \bar{e}_i$$

Выражение $\text{Re } d$ называется **скаляром элемента d** . Выражение $\text{Im } d$ называется **вектором элемента d** .

Согласно (8.4)

$$F = \{d \in D : \text{Re } d = d\}$$

Мы будем пользоваться записью $\text{Re } D$ для обозначения **алгебры скаляров кольца D** .

Теорема 8.3. *Множество*

$$(8.5) \quad \text{Im } D = \{d \in D : \text{Re } d = 0\}$$

является $(\text{Re } D)$ -модулем, который мы называем модуль векторов кольца D .

$$(8.6) \quad D = \text{Re } D \oplus \text{Im } D$$

Доказательство. Пусть $c, d \in \text{Im } D$. Тогда $c_0 = d_0 = 0$. Следовательно,

$$(c + d)_0 = c_0 + d_0 = 0$$

Если $a \in \text{Re } D$, то

$$(ad)_0 = ad_0 = 0$$

Следовательно, $\text{Im } D$ является $(\text{Re } D)$ -модулем.

Последовательность модулей

$$0 \longrightarrow \text{Re } D \xrightarrow{\text{id}} D \xrightarrow{\text{Im}} \text{Im } D \longrightarrow 0$$

является точной последовательностью. Согласно определению (8.4) отображения Re , следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \text{Re } D & \xrightarrow{\text{id}} & D \\ \text{id} \downarrow & \swarrow \text{Re} & \\ \text{Re } D & & \end{array}$$

Согласно утверждению (2) предложения [1]-III.3.3,

$$(8.7) \quad D = \text{id}(\text{Re } D) \oplus \ker \text{Re}$$

Согласно определению (8.5)

$$(8.8) \quad \ker \text{Re} = \{d \in D : \text{Re } d = 0\} = \text{Im } D$$

Равенство (8.6) следует из равенств (8.7), (8.8). \square

Согласно теореме 8.3, однозначно определено представление

$$(8.9) \quad d = \text{Re } d + \text{Im } d$$

Определение 8.4. Отображение

$$(8.10) \quad d^* = \text{Re } d - \text{Im } d$$

называется **сопряжением в кольце** при условии, если это отображение удовлетворяет равенству

$$(8.11) \quad (cd)^* = d^* c^*$$

Кольцо D , в котором определено сопряжение, называется **кольцом с сопряжением**. \square

Согласно теореме 8.1, кольцо с сопряжением D является ассоциативной $(\text{Re } D)$ -алгеброй, которую мы также будем называть **алгеброй с сопряжением**.

Следствие 8.5.

$$(8.12) \quad (d^*)^* = d$$

\square

Очевидно, существуют кольца, в которых условие (8.11) не выполнено. Для того, чтобы понять какие свойства у кольца с сопряжением D , рассмотрим структурные константы $(\text{Re } D)$ -алгебры D . Равенство

$$(8.13) \quad C_{0k}^l = C_{k0}^l = \delta_l^k$$

является следствием равенства $1d = d1 = d$.

Теорема 8.6. *Кольцо D является кольцом с сопряжением, если*

$$(8.14) \quad C_{kl}^0 = C_{lk}^0 \quad C_{kl}^p = -C_{lk}^p$$

$$1 < k < n \quad 1 < l < n \quad 1 < p < n$$

Доказательство. Из равенств (8.9), (8.10) следует

$$(8.15) \quad (cd)^* = (\operatorname{Re} c \operatorname{Re} d + \operatorname{Re} c \operatorname{Im} d + \operatorname{Im} c \operatorname{Re} d + \operatorname{Im} c \operatorname{Im} d)^*$$

$$= \operatorname{Re} c \operatorname{Re} d - \operatorname{Re} c \operatorname{Im} d - \operatorname{Im} c \operatorname{Re} d + (\operatorname{Im} c \operatorname{Im} d)^*$$

$$(8.16) \quad d^* c^* = (\operatorname{Re} d - \operatorname{Im} d)(\operatorname{Re} c - \operatorname{Im} c)$$

$$= \operatorname{Re} d \operatorname{Re} c - \operatorname{Re} d \operatorname{Im} c - \operatorname{Im} d \operatorname{Re} c + \operatorname{Im} d \operatorname{Im} c$$

Следовательно, из равенства (8.11) следует

$$(8.17) \quad (\operatorname{Im} c \operatorname{Im} d)^* = \operatorname{Im} d \operatorname{Im} c$$

Пусть \bar{e} - базис $(\operatorname{Re} D)$ -алгебры D . Из равенства (8.17) следует

$$(8.18) \quad (C_{kl}^0 c^k d^l + C_{kl}^p c^k d^l \bar{e}_p)^* = C_{kl}^0 c^k d^l - C_{kl}^p c^k d^l \bar{e}_p$$

$$= C_{kl}^0 d^k c^l + C_{kl}^p d^k c^l \bar{e}_p$$

$$1 < k < n \quad 1 < l < n \quad 1 < p < n$$

Равенство (8.14) следует из равенства (8.18). □

Следствие 8.7.

$$\bar{e}_k \bar{e}_k \in \operatorname{Re} D$$

□

Отображение сопряжения можно представить с помощью матрицы I

$$(8.19) \quad d^* = I \circ d \quad I_k^0 = \delta_k^0 \quad I_0^k = \delta_0^k \quad k = 0, \dots, n$$

$$I_k^m = -\delta_k^m \quad I_m^k = -\delta_m^k \quad m = 1, \dots, n$$

Пример 8.8. Произведение в множестве комплексных чисел C коммутативно. Однако поле комплексных чисел содержит подполе R . Векторное пространство $\operatorname{Im} C$ имеет размерность 1 и базис $\bar{e}_1 = i$. Соответственно

$$c^* = c^0 - c^1 i$$

□

Пример 8.9. Тело кватернионов H содержит подполе R . Векторное пространство $\operatorname{Im} H$ имеет размерность 3 и базис

$$\bar{e}_1 = i \quad \bar{e}_2 = j \quad \bar{e}_3 = k$$

Соответственно

$$d^* = d^0 - d^1 i - d^2 j - d^3 k$$

□

9. ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ АЛГЕБРЫ С СОПРЯЖЕНИЕМ

Мы можем рассматривать кольцо D как $D\star$ -модуль размерности 1.

Теорема 9.1. $D\star$ -линейное отображение кольца с сопряжением D имеет вид

$$(9.1) \quad f(c) = cd \quad d \in D$$

Пусть \bar{e} - $(\text{Re } D)$ -базис кольца D . Координаты отображения f

$$(9.2) \quad f(c) = c^l f_l^i \bar{e}_i$$

относительно базиса \bar{e} удовлетворяют равенству

$$(9.3) \quad f_k^j = f_0^i C_{ki}^j$$

$$(9.4) \quad d = f_0^i \bar{e}_i$$

Доказательство. $(\text{Re } D)$ -линейное отображение удовлетворяет равенствам

$$(9.5) \quad f(ac) = (ac)^i f_i^j \bar{e}_j = a^k c^l C_{kl}^i f_i^j \bar{e}_j$$

$$(9.6) \quad af(c) = a^k (f(c))^i C_{ki}^j \bar{e}_j = a^k c^l f_l^i C_{ki}^j \bar{e}_j$$

Из равенств (9.5), (9.6), следует

$$(9.7) \quad a^k c^l C_{kl}^i f_i^j \bar{e}_j = a^k c^l f_l^i C_{ki}^j \bar{e}_j$$

Равенство

$$(9.8) \quad C_{kl}^i f_i^j = f_l^i C_{ki}^j$$

следует из равенства (9.7).

Из равенства (9.8) следует⁶

$$(9.9) \quad C_{k0}^i f_i^j = f_0^i C_{ki}^j$$

Из равенств (8.13), (9.9), следует

$$(9.10) \quad \delta_k^i f_i^j = f_0^i C_{ki}^j$$

Равенство (9.3) следует из равенства (9.10).

Из равенств (9.2), (9.3) следует

$$(9.11) \quad f(c) = c^l f_0^j C_{lj}^i \bar{e}_i$$

Равенство (9.4) следует из равенств (9.1), (9.11). □

Определение 9.2. Пусть D - кольцо с сопряжением. Отображение

$$f : D \rightarrow D$$

называется $D\star$ -антилинейным⁷ если отображение f удовлетворяет равенству

$$(9.12) \quad f(da) = f(a)d^*$$

□

⁶Пусть $l = 0$.

⁷Определение 9.2 дано по аналогии с определением 5.1. Это определение также учитывает требования к антилинейному гомоморфизму в определении 10.2.

Теорема 9.3. D -антилинейное отображение кольца с сопряжением D имеет вид

$$(9.13) \quad f(c) = dc^* = dI \circ c \quad d \in D$$

Пусть \bar{e} - $(\text{Re } D)$ -базис кольца D . Координаты отображения f

$$(9.14) \quad f(c) = c^l f_l^i \bar{e}_i$$

относительно базиса \bar{e} удовлетворяют равенству

$$(9.15) \quad f_l^j = f_0^k I_l^i C_{ki}^j$$

$$(9.16) \quad d = f_0^i \bar{e}_i$$

Доказательство. $(\text{Re } D)$ -линейное отображение удовлетворяет равенствам

$$(9.17) \quad f(ac) = ((ac)^*)^i f_i^j \bar{e}_j = c^p a^q (C_{pq}^i)^* f_i^j \bar{e}_j$$

$$(9.18) \quad \begin{aligned} f(c)a^* &= (f(c))^k (a^*)^i C_{ki}^j \bar{e}_j = (c^*)^l f_l^k (a^*)^i C_{ki}^j \bar{e}_j \\ &= I_p^l c^p f_l^k I_q^i a^q C_{ki}^j \bar{e}_j \end{aligned}$$

Из равенств (9.17), (9.18), следует

$$(9.19) \quad c^p a^q (C_{pq}^i)^* f_i^j \bar{e}_j = I_p^l c^p f_l^k I_q^i a^q C_{ki}^j \bar{e}_j$$

Равенство

$$(9.20) \quad (C_{pq}^i)^* f_i^j = I_p^l f_l^k I_q^i C_{ki}^j$$

следует из равенства (9.19).

Из равенства (9.20) следует⁸

$$(9.21) \quad (C_{0q}^i)^* f_i^j = I_0^l f_l^k I_q^i C_{ki}^j$$

Из равенств (8.13), (8.19), (9.21), следует

$$(9.22) \quad \delta_q^i f_i^j = \delta_0^l f_l^k I_q^i C_{ki}^j$$

Равенство (9.15) следует из равенства (9.22).

Из равенств (9.14), (9.15) следует

$$(9.23) \quad f(c) = c^l f_0^k I_l^i C_{ki}^j \bar{e}_j = f_0^k I_l^i c^l C_{ki}^j \bar{e}_j = f_0^k (c^*)^i C_{ki}^j \bar{e}_j$$

Равенство (9.16) следует из равенств (9.1), (9.23). □

Теорема 9.4. Если отображение

$$f : D \rightarrow D$$

является D -линейным отображением, то отображение

$$g : D \rightarrow D \quad g(d) = (f(d))^*$$

является D -антилинейным отображением.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из равенства

$$g(cd) = (f(cd))^* = (cf(d))^* = (f(d))^* c^* = g(d) c^*$$

и определения 9.2. □

⁸Пусть $p = 0$.

10. АНТИЛИНЕЙНЫЙ ГОМОМОРФИЗМ $D\star$ -АЛГЕБРЫ

В этом разделе D - это кольцо с сопряжением.

Теорема 10.1. Пусть

$$(10.1) \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f_{1\cdot 1,2}} & A_1 \xrightarrow{f_{1\cdot 2,3}} A_1 \\ & & \uparrow f_{1\cdot 1,2} \\ & & D \end{array} \quad \begin{array}{l} f_{1\cdot 1,2}(d) : \bar{v} \rightarrow d\bar{v} \\ f_{1\cdot 2,3}(\bar{v}) : \bar{w} \rightarrow \bar{C}_1(\bar{v}, \bar{w}) \\ \bar{C}_1 \in \mathcal{L}(A_1^2; A_1) \end{array}$$

диаграмма представлений, описывающая $D\star$ -алгебру A_1 . Пусть

$$(10.2) \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f_{2\cdot 1,2}} & A_2 \xrightarrow{f_{2\cdot 2,3}} A_2 \\ & & \uparrow f_{2\cdot 1,2} \\ & & D \end{array} \quad \begin{array}{l} f_{2\cdot 1,2}(d) : \bar{v} \rightarrow \bar{v}d \\ f_{2\cdot 2,3}(\bar{v}) : \bar{w} \rightarrow \bar{C}_2(\bar{w}, \bar{v}) \\ \bar{C}_2 \in \mathcal{L}(A_2^2; A_2) \end{array}$$

диаграмма представлений, описывающая $\star D$ -алгебру A_2 . Морфизм $D\star$ -алгебры A_1 в $\star D$ -алгебру A_2

$$\begin{aligned} r_1 : D &\rightarrow D & \bar{r}_2 : A_1 &\rightarrow A_2 \\ r_1(d) &= d^* \end{aligned}$$

является $D\star$ -антилинейным отображением $D\star$ -алгебры A_1 в $\star D$ -алгебру A_2 таким, что

$$(10.3) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{r}_2(\bar{b})\bar{r}_2(\bar{a})$$

Доказательство. Согласно равенству [5]-(4.2.3), морфизм (r_1, \bar{r}_2) представления $f_{1,2}$ удовлетворяет равенству

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \bar{r}_2(f_{1\cdot 1,2}(d)(\bar{a})) &= f_{2\cdot 1,2}(r_1(d))(\bar{r}_2(\bar{a})) \\ \bar{r}_2(d\bar{a}) &= \bar{r}_2(\bar{a})d^* \end{aligned}$$

Следовательно, отображение (r_1, \bar{r}_2) является $D\star$ -антилинейным отображением.

Согласно равенству [5]-(4.2.3), морфизм (\bar{r}_2, \bar{r}_2) представления $f_{2,3}$ удовлетворяет равенству⁹

$$(10.5) \quad \bar{r}_2(f_{1\cdot 2,3}(\bar{a}_2)(\bar{a}_3)) = f_{2\cdot 2,3}(\bar{r}_2(\bar{a}_2))(\bar{r}_2(\bar{a}_3))$$

Из равенств (10.5), (10.1), (10.2), следует

$$(10.6) \quad \bar{r}_2(\bar{C}_1(\bar{v}, \bar{w})) = \bar{C}_2(\bar{r}_2(\bar{w}), \bar{r}_2(\bar{v}))$$

Равенство (10.3) следует из равенств (10.6), (6.3). \square

Определение 10.2. Морфизм представлений $D\star$ -алгебры A_1 в $\star D$ -алгебру A_2 называется $D\star$ -антилинейным гомоморфизмом $D\star$ -алгебры A_1 в $\star D$ -алгебру A_2 . \square

⁹Так как в диаграммах представлений (6.4), (6.5), носители Ω_2 -алгебры и Ω_3 -алгебры совпадают, то также совпадают морфизмы представлений на уровнях 2 и 3.

Теорема 10.3. Пусть \bar{e}_1 - базис $D\star$ -алгебры A_1 . Пусть \bar{e}_2 - базис $\star D$ -алгебры A_2 . Тогда антилинейный гомоморфизм¹⁰ (r_1, \bar{r}_2) $D\star$ -алгебры A_1 в $\star D$ -алгебру A_2 имеет представление¹¹

$$(10.7) \quad \begin{aligned} \bar{b} &= \bar{e}_{2*} * r_{2*} * r_1(a) = \bar{e}_{2 \cdot i} r_{2 \cdot j}^i r_1(a^j) \\ b &= r_{2*} * r_1(a) \end{aligned}$$

относительно заданных базисов. Здесь

- a - координатная матрица вектора \bar{a} относительно базиса \bar{e}_1 .
- b - координатная матрица вектора

$$\bar{b} = \bar{r}_2(\bar{a})$$

относительно базиса \bar{e}_2 .

- r_2 - координатная матрица множества векторов $(\bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i}))$ относительно базиса \bar{e}_2 . Мы будем называть матрицу r_2 **матрицей антилинейного гомоморфизма** относительно базисов \bar{e}_1 и \bar{e}_2 .

Доказательство. Вектор $\bar{a} \in A_1$ имеет разложение

$$\bar{a} = a^* * \bar{e}_1$$

относительно базиса \bar{e}_1 . Вектор $\bar{b} \in A_2$ имеет разложение

$$(10.8) \quad \bar{b} = \bar{e}_{2*} * b$$

относительно базиса \bar{e}_2 .

Так как (r_1, \bar{r}_2) - антилинейный гомоморфизм, то на основании (10.4) следует, что

$$(10.9) \quad \bar{b} = \bar{r}_2(\bar{a}) = \bar{r}_2(a^* * \bar{e}_1) = \bar{r}_2(\bar{e}_1)_* * a^*$$

где

$$a^* = \begin{pmatrix} (a^1)^* \\ \dots \\ (a^n)^* \end{pmatrix}$$

$\bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i})$ также вектор $\star D$ -модуля A_2 и имеет разложение

$$(10.10) \quad \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot i}) = \bar{e}_{2*} * r_{2 \cdot i} = \bar{e}_j r_{2 \cdot i}^j$$

относительно базиса \bar{e}_2 . Комбинируя (10.9) и (10.10), мы получаем

$$(10.11) \quad \bar{b} = \bar{e}_{2 \circ} \circ r_{2 \circ} \circ a^*$$

(10.7) следует из сравнения (10.8) и (10.11) и теоремы [2]-4.3.3. \square

Теорема 10.4. Пусть \bar{e}_1 - базис $D\star$ -алгебры A_1 . Пусть \bar{e}_2 - базис $\star D$ -алгебры A_2 . Матрица антилинейного гомоморфизма и структурные константы связаны соотношением

$$(10.12) \quad (C_{1 \cdot ij}^k)^* r_{2 \cdot k}^l = r_{2 \cdot j}^p r_{2 \cdot i}^q C_{2 \cdot pq}^l$$

¹⁰Эта теорема аналогична теореме [2]-4.4.3.

¹¹Для поля комплексных чисел, равенство (5.11) является следствием равенства (10.7).

Доказательство. Пусть

$$\bar{a}, \bar{b} \in A_1 \quad \bar{a} = a^* *_1 \bar{e}_1 \quad \bar{b} = b^* *_1 \bar{e}_1$$

Из равенств (6.2), (6.3), (10.1), следует

$$(10.13) \quad \bar{a}\bar{b} = a^i b^j C_{1 \cdot ij}^k \bar{e}_{1 \cdot k}$$

Из равенств (10.4), (10.13), следует

$$(10.14) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot k})(a^i b^j C_{1 \cdot ij}^k)^* = \bar{r}_2(\bar{e}_{1 \cdot k})(C_{1 \cdot ij}^k)^*(b^j)^*(a^i)^*$$

Из теоремы 10.3 и равенства (10.14), следует

$$(10.15) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{e}_{2 \cdot l} r_{2 \cdot k}^l (C_{1 \cdot ij}^k)^*(a^i)^*(b^j)^*$$

Из равенства (10.3) и теоремы 10.3, следует

$$(10.16) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{r}_2(\bar{b})\bar{r}_2(\bar{a}) = \bar{e}_{2 \cdot q} r_{2 \cdot j}^q (b^j)^* \bar{e}_{2 \cdot p} r_{2 \cdot i}^p (a^i)^*$$

Из равенств (6.2), (6.3), (10.2), (10.16), следует

$$(10.17) \quad \bar{r}_2(\bar{a}\bar{b}) = \bar{e}_{2 \cdot l} C_{2 \cdot pq}^l r_{2 \cdot i}^p (a^i)^* r_{2 \cdot j}^q (b^j)^*$$

Из равенств (10.15), (10.17), следует

$$(10.18) \quad \bar{e}_{2 \cdot l} r_{2 \cdot k}^l (C_{1 \cdot ij}^k)^*(a^i)^*(b^j)^* = \bar{e}_{2 \cdot l} C_{2 \cdot pq}^l r_{2 \cdot i}^p (a^i)^* r_{2 \cdot j}^q (b^j)^*$$

Равенство (10.12) следует из равенства (10.18), так как векторы базиса \bar{e}_2 линейно независимы, и a^i, b^i (а следовательно, $(a^i)^*, (b^i)^*$) - произвольные величины. \square

11. ИНВОЛЮЦИЯ БАНАХОВОЙ D -АЛГЕБРЫ

В этом разделе D - это кольцо с сопряжением. Мы будем также полагать, что в абелевой группе A определены структуры $D\star$ -модуля и $\star D$ -модуля.¹²

Определение 11.1. Пусть A - банаховая D -алгебра. Инволюция - это антилинейный гомоморфизм $x \rightarrow x^*, x \in A$, такое, что

$$(11.1) \quad \begin{aligned} x^{**} &= x \\ \|x^* x\| &= \|x\|^2 \\ x, y &\in A \end{aligned}$$

\square

Теорема 11.2. Пусть A - банаховая D -алгебра. Пусть отображение $x \rightarrow x^*, x \in A$, является инволюцией. Тогда

$$(11.2) \quad (xy)^* = y^* x^*$$

Доказательство. Равенство (11.2) является следствием определения 11.1 и теоремы 10.1. \square

Определение 11.3. Базис \bar{e} называется нормированным базисом, если $\|\bar{e}_i\| = 1$ для любого вектора \bar{e}_i базиса \bar{e} . \square

¹²Условия, когда данное требование выполнено, будут рассмотрены в отдельной статье. Если D - поле, то это условие очевидно. Если D - тело, то это условие выполнено согласно теореме [2]-6.3.1.

Не нарушая общности, мы можем положить, что базис \bar{e} нормирован. Если предположить, что норма вектора \bar{e}_i отлична от 1, то мы можем этот вектор заменить вектором

$$\bar{e}'_i = \frac{1}{\|\bar{e}_i\|} \bar{e}_i$$

Теорема 11.4. Пусть D - коммутативное кольцо. Если отображение

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

является линейным, то отображение

$$h(x) = f(x^*)$$

является антилинейным. Если отображение

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

является линейным гомоморфизмом, то отображение

$$h(x) = f(x^*)$$

является антилинейным гомоморфизмом.

Доказательство. Согласно теореме 10.1 и равенству (10.4)

$$(11.3) \quad (da)^* = a^* d^* \quad d \in D \quad a \in A$$

Если f - линейное отображение, то

$$(11.4) \quad f(dx) = df(x)$$

Из равенств (11.3), (11.4), следует

$$h(xd) = f((xd)^*) = f(d^* x^*) = d^* f(x^*) = d^* h(x)$$

Если f - линейный гомоморфизм, то из равенств (6.6), (11.2), следует

$$h(ab) = f((ab)^*) = f(b^* a^*) = f(b^*) f(a^*) = h(b) h(a)$$

Следовательно, h является антилинейным гомоморфизмом. \square

12. C^* -АЛГЕБРА

Определение 12.1. C^* -алгебра A - это банаховая C -алгебра, в которой определена инволюция.¹³ \square

Согласно теореме 5.4, инволюция имеет вид

$$(12.1) \quad \begin{aligned} (x^*)^{0j} &= f_{0i}^{0j} x^{0i} + f_{0i}^{1j} x^{1i} \\ (x^*)^{1j} &= f_{0i}^{1j} x^{0i} - f_{0i}^{0j} x^{1i} \end{aligned}$$

относительно базиса \bar{e}_{AR} .

Теорема 12.2.

$$(12.2) \quad \begin{aligned} \delta_k^j &= f_{0i}^{0j} f_{0k}^{0i} + f_{0i}^{1j} f_{0k}^{1i} \\ 0 &= f_{0i}^{0j} f_{0k}^{1i} - f_{0i}^{1j} f_{0k}^{0i} \end{aligned}$$

¹³Это определение сделано на основе определения [6]-2.2.1.

Доказательство. Из равенства (12.1) следует

$$\begin{aligned}
 (x^{**})^{0j} &= f_{0i}^{0j}(x^*)^{0i} + f_{0i}^{1j}(x^*)^{1i} \\
 &= f_{0i}^{0j}(f_{0k}^{0i}x^{0k} + f_{0k}^{1i}x^{1k}) + f_{0i}^{1j}(f_{0k}^{1i}x^{0k} - f_{0k}^{0i}x^{1k}) \\
 &= f_{0i}^{0j}f_{0k}^{0i}x^{0k} + f_{0i}^{0j}f_{0k}^{1i}x^{1k} + f_{0i}^{1j}f_{0k}^{1i}x^{0k} - f_{0i}^{1j}f_{0k}^{0i}x^{1k} \\
 (12.3) \quad (x^{**})^{1j} &= f_{0i}^{1j}(x^*)^{0i} - f_{0i}^{0j}(x^*)^{1i} \\
 &= f_{0i}^{1j}(f_{0k}^{0i}x^{0k} + f_{0k}^{1i}x^{1k}) - f_{0i}^{0j}(f_{0k}^{1i}x^{0k} - f_{0k}^{0i}x^{1k}) \\
 &= f_{0i}^{1j}f_{0k}^{0i}x^{0k} + f_{0i}^{1j}f_{0k}^{1i}x^{1k} - f_{0i}^{0j}f_{0k}^{1i}x^{0k} + f_{0i}^{0j}f_{0k}^{0i}x^{1k}
 \end{aligned}$$

(12.2) следует из равенств (11.1), (12.3). \square

Теорема 12.3.

$$\begin{aligned}
 &C_{AC \cdot ij}^{k0}f_{0k}^{0l} + C_{AC \cdot ij}^{k1}f_{0k}^{1l} \\
 (12.4) \quad &= f_{0j}^{0p}f_{0i}^{0q}C_{AC \cdot pq}^{l0} - f_{0j}^{1p}f_{0i}^{1q}C_{AC \cdot pq}^{l0} - f_{0j}^{0p}f_{0i}^{1q}C_{AC \cdot pq}^{l1} - f_{0j}^{1p}f_{0i}^{0q}C_{AC \cdot pq}^{l1} \\
 &C_{AC \cdot ij}^{k0}f_{0k}^{1l} - C_{AC \cdot ij}^{k1}f_{0k}^{0l} \\
 &= f_{0j}^{0p}f_{0i}^{0q}C_{AC \cdot pq}^{l1} - f_{0j}^{1p}f_{0i}^{1q}C_{AC \cdot pq}^{l1} + f_{0j}^{0p}f_{0i}^{1q}C_{AC \cdot pq}^{l0} + f_{0j}^{1p}f_{0i}^{0q}C_{AC \cdot pq}^{l0}
 \end{aligned}$$

Доказательство. Из равенства (5.11) следует

$$(12.5) \quad f_i^j = f_{0i}^{0j} + f_{0i}^{1j}i$$

Из равенств (3.17), (12.5), (10.12), следует

$$\begin{aligned}
 (12.6) \quad &(C_{AC \cdot ij}^{k0})^* f_k^l = f_j^p f_i^q C_{AC \cdot pq}^{l0} \\
 &(C_{AC \cdot ij}^{k0} + C_{AC \cdot ij}^{k1}i)^* (f_{0k}^{0l} + f_{0k}^{1l}i) \\
 &= (f_{0j}^{0p} + f_{0j}^{1p}i)(f_{0i}^{0q} + f_{0i}^{1q}i)(C_{AC \cdot pq}^{l0} + C_{AC \cdot pq}^{l1}i)
 \end{aligned}$$

Из равенства (12.6) следует

$$\begin{aligned}
 &C_{AC \cdot ij}^{k0}f_{0k}^{0l} + C_{AC \cdot ij}^{k1}f_{0k}^{1l} + (C_{AC \cdot ij}^{k0}f_{0k}^{1l} - C_{AC \cdot ij}^{k1}f_{0k}^{0l})i \\
 (12.7) \quad &= (f_{0j}^{0p}f_{0i}^{0q} - f_{0j}^{1p}f_{0i}^{1q} + (f_{0j}^{0p}f_{0i}^{1q} + f_{0j}^{1p}f_{0i}^{0q})i)(C_{AC \cdot pq}^{l0} + C_{AC \cdot pq}^{l1}i) \\
 &= f_{0j}^{0p}f_{0i}^{0q}C_{AC \cdot pq}^{l0} - f_{0j}^{1p}f_{0i}^{1q}C_{AC \cdot pq}^{l0} - f_{0j}^{0p}f_{0i}^{1q}C_{AC \cdot pq}^{l1} - f_{0j}^{1p}f_{0i}^{0q}C_{AC \cdot pq}^{l1} \\
 &+ (f_{0j}^{0p}f_{0i}^{0q}C_{AC \cdot pq}^{l1} - f_{0j}^{1p}f_{0i}^{1q}C_{AC \cdot pq}^{l1} + f_{0j}^{0p}f_{0i}^{1q}C_{AC \cdot pq}^{l0} + f_{0j}^{1p}f_{0i}^{0q}C_{AC \cdot pq}^{l0})i
 \end{aligned}$$

Равенство (12.4) следует из равенства (12.7). \square

13. ПРИМЕР ИНВОЛЮЦИИ

Пусть

$$\begin{aligned}
 e_1^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & e_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 e_2^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & e_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

базис \bar{e} алгебры 2×2 матриц. Матрица

$$a = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

имеет разложение

$$a = a_1^1 e_1^1 + a_2^1 e_1^2 + a_1^2 e_2^1 + a_2^2 e_2^2$$

относительно базиса \bar{e} . Структурные константы в алгебре матриц имеют вид

$$C_{q \cdot j \cdot l}^{p \cdot i \cdot k} = \delta_l^i \delta_j^p \delta_q^k$$

Произведение матриц a и b имеет вид

$$(ab)_q^p = C_{q \cdot j \cdot l}^{p \cdot i \cdot k} a_i^j b_k^l = \delta_l^i \delta_j^p \delta_q^k a_i^j b_k^l = a_l^p b_q^l$$

Если мы матрицу a представим в виде вектора

$$a = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix}$$

то матрицу преобразование f

$$a_j^i = f_{j \cdot l}^{i \cdot k} a_k^l$$

можно представить в следующем виде

$$f = \begin{pmatrix} f_{1 \cdot 1}^{1 \cdot 1} & f_{1 \cdot 2}^{1 \cdot 1} & f_{1 \cdot 1}^{1 \cdot 2} & f_{1 \cdot 2}^{1 \cdot 2} \\ f_{2 \cdot 1}^{1 \cdot 1} & f_{2 \cdot 2}^{1 \cdot 1} & f_{2 \cdot 1}^{1 \cdot 2} & f_{2 \cdot 2}^{1 \cdot 2} \\ f_{1 \cdot 1}^{2 \cdot 1} & f_{1 \cdot 2}^{2 \cdot 1} & f_{1 \cdot 1}^{2 \cdot 2} & f_{1 \cdot 2}^{2 \cdot 2} \\ f_{2 \cdot 1}^{2 \cdot 1} & f_{2 \cdot 2}^{2 \cdot 1} & f_{2 \cdot 1}^{2 \cdot 2} & f_{2 \cdot 2}^{2 \cdot 2} \end{pmatrix}$$

Преобразованию транспонирования

$$a = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow a^T = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

соответствует матрица

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Так как мы не имеем аналитической записи для оператора транспонирования, то мы воспользуемся нестандартным форматом записи.

$$\begin{aligned}
 (a^T b^T)_q^p &= C_{q \cdot j \cdot l}^{p \cdot i \cdot k} (a^T)_i^j (b^T)_k^l \\
 &= \delta_l^i \delta_j^p \delta_q^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_1^2 \\ a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ b_1^2 \\ b_2^2 \end{pmatrix} \\
 (13.1) \quad &= \delta_l^i \delta_j^p \delta_q^k \begin{pmatrix} j : 1 & a_1^1 \\ j : 2 & a_1^2 \\ j : 1 & a_2^1 \\ j : 2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l : 1 & b_1^1 \\ l : 2 & b_1^2 \\ l : 1 & b_2^1 \\ l : 2 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p : 1 & a_1^1 b_1^1 + a_1^2 b_2^1 \\ p : 2 & a_1^1 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 \\ p : 1 & a_2^1 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 \\ p : 2 & a_2^1 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k^1 a_1^k \\ b_k^1 a_2^k \\ b_k^2 a_1^k \\ b_k^2 a_2^k \end{pmatrix} \\
 &= ((ba)^T)_q^p
 \end{aligned}$$

Если a_j^i - комплексные числа, то инволюцию можно представить антилинейным отображением с матрицей

$$f = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

14. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Серж Ленг, Алгебра, М. Мир, 1968
- [2] Александр Клейн, Лекции по линейной алгебре над телом, eprint [arXiv:math.GM/0701238](https://arxiv.org/abs/math/0701238) (2010)
- [3] Александр Клейн, Этюд о кватернионах, eprint [arXiv:0909.0855](https://arxiv.org/abs/0909.0855) (2010)
- [4] Aleks Kleyn, Linear Mappings of Free Algebra: First Steps in Noncommutative Linear Algebra, Lambert Academic Publishing, 2010

- [5] Aleks Kleyn, Representation Theory: Representation of Universal Algebra, Lambert Academic Publishing, 2011
- [6] William Arveson, A short course on spectral theory. Springer - Verlag, New York, 2002
- [7] Robert Hermann, Topics in the mathematics of quantum mechanics. Math Sci Press, 1973

15. ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

C^* -алгебра 24

D -антилинейное отображение кольца с
сопряжением 19

D -антилинейный гомоморфизм 21

D -линейный гомоморфизм 10

алгебра с сопряжением 17

алгебра скаляров кольца 16

вектор элемента кольца 16

кольцо с сопряжением 17

матрица антилинейного гомоморфизма
22

матрица линейного гомоморфизма 11

модуль векторов кольца 16

скаляр элемента кольца 16

сопряжение в кольце 17

16. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

d^* сопряжение в кольце 17

$\text{Im } D$ модуль векторов кольца D 16

$\text{Im } d$ вектор элемента d кольца 16

$\text{Re } D$ алгебра скаляров кольца D 16

$\text{Re } d$ скаляр элемента d кольца 16